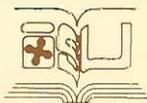


CARLO FELICE MANARA

APPUNTI DI
**LOGICA
ELEMENTARE**



Publicazioni Servizio Librario dell'I.S.U.
Università Cattolica del Sacro Cuore

CARLO FELICE MANARA

Appunti di
logica elementare

CARLO FELICE MANARA

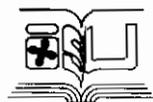
22, Via G.B. Piranesi
20137 MILANO

CARLO FELICE MANARA

Manara, Carlo Felice

APPUNTI DI

LOGICA ELEMENTARE



Publicazioni Servizio Librario dell'I.S.U.
Università Cattolica del Sacro Cuore

INTRODUZIONE

Le pagine che seguono contengono in sintesi gli appunti del corso di logica da me tenuto presso la facoltà di Scienze Politiche della Università Cattolica S. Cuore.

La esposizione è stata tenuta ad un livello molto elementare, con scarso uso degli strumenti formali e simbolici, perché anche i lettori meno abituati all'impiego dei linguaggi formali possano conoscere, almeno sommariamente, gli strumenti oggi utilizzati per la deduzione, e conoscere i problemi che nascono dalla loro introduzione e dal loro uso.

Speriamo che ciò serva a spiegare le lacune e le omissioni che non potrebbero essere tollerate qualora il corso si rivolgesse ad altri ascoltatori, aventi interessi forse più precisi e preparazioni migliori nel campo dei sistemi formali, in particolare in quello della matematica.

Abbiamo pure ritenuto utile dare qualche cenno di calcolo delle probabilità, presentando questo capitolo della matematica come una dottrina che tende a razionalizzare le scelte economiche in condizioni di informazione incompleta ed a utilizzare nel miglior modo possibile le informazioni a questo scopo.

ΜΗΔΕΙΣ ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΕΙΣΙΤΩ

CAPITOLO I
LA DEDUZIONE

CAPITOLO I

LA DEDUZIONE

1. — Non intendiamo dare qui, all'inizio della nostra trattazione, una definizione astratta e generale della logica; il Lettore potrà farsi un'idea di questa dottrina seguendoci nella esposizione delle nostre idee. Vorremmo tuttavia avvertire qui che spesso il termine 'logica' viene accompagnato con aggettivi che vorrebbero qualificarlo, o con espressioni che mostrano di avere lo stesso scopo; per esempio capita di leggere e di sentir parlare di "logica giuridica", oppure di "logica economica" oppure anche di "logica del profitto" o di "logica della violenza". A nostro parere questi modi di esprimersi distorcono il significato che vogliamo qui dare al termine 'logica'; invero noi pensiamo che queste espressioni, ed altre analoghe, siano imprecise e spesso fuorvianti, perché possono fare pensare che la scienza giuridica, oppure l'economia o altre dottrine possano avere delle 'logiche' particolari, ossia dei canoni di ragionamento peculiari, diversi dalle regole di ragionamento che sono valide per tutti.

Volendo tuttavia cercare di delimitare almeno provvisoriamente il significato del termine e di descrivere meglio il suo ambito, potremmo dire che la logica è l'insieme delle dottrine che si occupano delle regole per ben ragionare. Pare ovvio e chiaro che noi siamo tenuti a ben ragionare ogni volta che cerchiamo la verità; ma si può osservare che la ricerca della verità può essere fatta con vari metodi e con vari atteggiamenti: ciò è dimostrato dalla esistenza delle varie scienze, ognuna delle quali ha i suoi canoni, e ricerca la verità per diverse strade, a seconda del proprio oggetto e del proprio punto di vista. Così ci sono le scienze della natura che si occupano della materia inorganica, non vivente, e quelle che si occupano del vivente. Ci sono le scienze dell'uomo che si occupano di ciò che è avvenuto, secondo vari punti di vista, di ciò che l'uomo sceglie e dei suoi comportamenti.

Esula dai nostri scopi il dare qui una descrizione completa, una analisi esauriente ed una classificazione di tutte le scienze; ci limitiamo ad osservare che ognuna di esse, nel cercare la verità secondo i propri metodi, mira al possesso certo di questa verità, e che questa certezza può avere vari gradi, a seconda delle varie scienze e dei loro oggetti: la certezza della conoscenza che ci dà una dimostrazione matematica è ovviamente diversa dalla certezza con cui possiamo raggiungere la verità nella Storia. Ci pare tuttavia di poter dire che ogni scienza raggiunge il proprio grado di certezza attraverso un procedimento che tende alla spiegazione, alla motivazione delle cose che ci appaiono. In altre parole, noi pensiamo che la pura elencazione di fatti, anche accertati, la pura raccolta di quelli che si chiamano anche 'protocolli' (cioè di informazioni del tipo "L'osservatore tal dei tali ha visto, nel tale istante e nel tale luogo il tale fenomeno") non è ancora qualificabile come conoscenza scientifica: le informazioni che ci dà, per esempio, l'elenco telefonico di una città, anche se sono certe e degne di fiducia, non sono ancora qualificabili come conoscenze scientifiche. Ci pare infatti di poter dire che una delle circostanze che costituiscono essenzialmente la conoscenza scientifica, accanto alla certezza delle informazioni, sia la motivazione, la spiegazione di esse.

Per ricercare tale spiegazione ogni scienza ha i suoi propri metodi; ma crediamo che si possa affermare che ogni scienza segue una procedura che analizzeremo presto, e che ci condurrà a precisare il compito ed il significato della logica nella nostra conoscenza.

2. — Abbiamo affermato che, a nostro parere, una delle caratteristiche della conoscenza scientifica consiste nella ricerca di certezze che in qualche misura siano motivate. Vedremo subito che questa ricerca viene fatta da ogni scienza con delle procedure che coinvolgono quasi sempre un momento in cui entra necessariamente una operazione logica che viene chiamata "deduzione".

Ritorniamo per il momento alla descrizione che abbiamo dato della logica come dottrina che insegna a ragionare bene; e — potremmo aggiungere qui — come dottrina che insegna a costruire degli enunciati che noi accettiamo come veri.

Nasce qui una prima suddivisione della logica, suddivisione che trae la sua origine dalla analisi dei motivi che ci inducono ad accettare un enunciato come vero: tali motivi sono sostanzialmente di due tipi, perché noi possiamo accettare come vero un enunciato in forza del suo contenu-

to, perché dice delle cose vere, direttamente constatabili da noi o da un essere umano degno di fiducia, a proposito di cose esistenti o di fatti avvenuti. Oppure possiamo accettare come vero un enunciato perché è il risultato di una dimostrazione, cioè perché è collegato, con determinate regole a certi altri enunciati, che sono stati accettati come veri.

La parte della logica che analizza e discute i criteri per formare degli enunciati veri in forza del loro contenuto, delle cose che dicono, viene abitualmente chiamata 'Logica materiale' (o anche 'logica major' con una espressione latina classica). Questa parte è a stretto contatto con l'epistemologia e con le scienze particolari; invero ognuna di queste ha come scopo la ricerca della verità e la sua comunicazione, attraverso degli enunciati e comunque dei mezzi di comunicazione che trasmettono la verità.

In questo ambito pensiamo che si possa tentare di dare senso a qualcuna delle espressioni di cui abbiamo già detto; per esempio pensiamo che in questo ambito si possa anche parlare di 'logica della fisica', intendendo questa espressione nel senso che la fisica, come ogni scienza particolare, segue certe sue peculiari procedure per conseguire la verità e per comunicarla.

Non riteniamo invece di poter accettare la espressione 'logica della fisica' o altre consimili se — ripetiamo — sono intese nel senso che la scienza fisica ha delle sue regole peculiari e particolari per garantire la coerenza degli enunciati. La parte della logica che analizza e discute le regole che si debbono seguire per costruire degli enunciati validi a partire da altri accettati come tali viene chiamata 'Logica formale' (o anche 'logica minor' con una espressione latina classica).

Studieremo questa dottrina nei capitoli che seguono; per il momento ci interessa mettere in evidenza l'importanza che ha la logica in ogni procedimento conoscitivo che voglia avere i caratteri di scienza, cioè che ricerchi una conoscenza almeno tendenzialmente certa, motivata e spiegata della realtà che noi osserviamo.

A tal fine vorremmo analizzare in forma molto schematica il procedimento che ci conduce ad una conoscenza di questo tipo distinguendo in esso quattro fasi principali che potrebbero essere enumerate come segue:

- 1) osservazione;
- 2) formulazione di ipotesi di spiegazione;
- 3) deduzione delle conseguenze dalle ipotesi formulate;
- 4) verifica delle conseguenze con altre osservazioni.

È chiaro che senza la fase 1) non si potrebbe neppure iniziare la conoscenza; a seconda poi dei vari oggetti e dei vari livelli di spiegazione la fase 1) può avere moltissime specificazioni. Spesso per esempio nelle scienze più evolute la fase 1) comporta numerosi esperimenti che possono essere ripetuti variando le circostanze e le situazioni, in modo da rendere sempre più chiari e distinti i fenomeni che si vogliono spiegare.

Ma la ripetibilità dell'esperimento che conduce alla osservazione non sempre è possibile; non si può avere per esempio nelle scienze della osservazione pura, come la geografia o l'astronomia; non si può avere nelle scienze che riguardano l'uomo, per esempio la storia o la sociologia, nella maggior parte dei casi. Tuttavia noi pensiamo che sia troppo restrittivo negare il carattere di scienze a queste dottrine per il solo pretesto che le loro osservazioni non possono scaturire, di fatto o anche in diritto, da una grande massa di esperimenti ripetuti in laboratorio. Noi crediamo invece che anche queste dottrine abbiano diritto ad essere considerate come delle scienze a pieno titolo, perché anch'esse ricercano la spiegazione delle cose che osservano, anche se questa spiegazione ha un grado diverso di certezza rispetto a quello posseduto dalla fisica o dalla chimica.

La fase 2) è pure essenziale in ogni conoscenza che voglia essere scientifica, perché è il fondamento della spiegazione che forma il carattere essenziale della scienza.

Notiamo che la formulazione di una ipotesi assume quasi sempre la forma seguente: "Le cose si presentano a noi così e così perché prima è accaduto questo e quest'altro, oppure perché la costituzione della materia ha queste e queste altre caratteristiche".

Notiamo inoltre che il contenuto delle ipotesi esplicative che vengono provvisoriamente formulate non è mai direttamente osservabile; inverso, se potessimo osservare ciò che enunciano con le ipotesi, queste sarebbero a loro volta delle osservazioni, che debbono essere spiegate.

La fase 3) è pure essenziale per la esistenza di una spiegazione, perché è quella che fa passare dal contenuto delle ipotesi, che — ripetiamo — non è direttamente osservabile, ad altri enunciati i cui contenuti sono direttamente osservabili durante la fase 4), che è costituita dall'insieme delle osservazioni di controllo o di verifica delle ipotesi enunciate.

Ora possiamo osservare che è compito tipico della logica, ed in particolare della logica formale, l'accertare che la fase 3) si svolga correttamente, perché la fase stessa è sostanzialmente costituita da operazioni di deduzione, che non possono essere direttamente controllate nel loro contenuto, ma sempre e soltanto nella loro forma esteriore.

Invero si potrebbe schematizzare la fase 3) dicendo che essa si presenta sotto la forma del seguente ragionamento: "Se sono vere le ipotesi enunciate, allora si devono avere come conseguenze questi e questi altri fatti, che sono verificabili o controllabili con osservazioni, esperienze, testimonianze o altri procedimenti di accertamento dello stato della realtà".

3. — Abbiamo presentato poco fa, in modo schematico e rudimentale, le varie fasi del procedimento che conduce ad una spiegazione della realtà quale ci appare; dobbiamo osservare tuttavia che le fasi noi abbiamo enumerato non sono necessariamente separate nella realtà, né si succedono cronologicamente nel tempo così come le abbiamo presentate; la realtà della ricerca scientifica è ben diversa, ed in questa le fasi che abbiamo distinto per chiarezza sono spesso mescolate tra loro e sono difficilmente separabili.

Può avvenire che una ipotesi, o un insieme di ipotesi tra loro collegate, possa spiegare un grande numero di fenomeni; allora spesso questa spiegazione viene chiamata "teoria". Così è avvenuto per la teoria Newtoniana della gravitazione universale, che ha spiegato e spiega ancora, almeno in parte, moltissimi fenomeni che si manifestano con la mutua attrazione dei corpi; così è avvenuto per la teoria cinetica dei gas, che ha spiegato e spiega ancora (almeno in parte) moltissimi fenomeni che la materia manifesta quando si presenta a noi sotto lo stato gassoso.

Ovviamente le ragioni che inducono a chiamare "teoria" una spiegazione di un gruppo di fenomeni possono essere diverse, e l'adozione della denominazione può anche dipendere dall'atteggiamento psicologico di chi utilizza il termine.

Non intendiamo addentrarci ora in queste analisi; ci interessa soltanto mettere in evidenza il fatto che la costruzione di una teoria segue sostanzialmente la procedura che abbiamo schematizzato, e che in questa procedura entra in modo essenziale una fase in cui la operazione principale è quella logica di deduzione.

Vorremmo inoltre aggiungere che anche la fase 1) non consiste meramente nella accumulazione di osservazioni disorganiche: spesso l'attenzione dell'osservatore è già orientata in una certa direzione, ed è attratta da certi fatti che non si presentano affatto in modo confuso e casuale; anche gli esperimenti che conducono alla rilevazione di certe costanti di comportamento della realtà, che stimolano la ricerca di spiegazione, sono diretti da una idea, che spesso non è coscientemente posseduta dallo scien-

ziato né distintamente formulata, ma che contiene tuttavia una rudimentale spiegazione, una specie di germe della teoria che verrà poi formulata in modo esplicito e della quale si cercheranno le conferme sperimentali. Questo aspetto della costruzione di una teoria scientifica assume una fisionomia particolare quando si tratti di una teoria di tipo fisico-matematico. Invero in questo caso potremmo dire che vi è, nella mente del ricercatore, una valutazione forse anche approssimata e rudimentale, di una gerarchia di importanza quantitativa di certe presunte cause rispetto a certe altre, di certi fenomeni rispetto a certi altri.

Si consideri per esempio il caso della classica legge di caduta libera dei gravi. Appare chiaro che la osservazione rudimentale ed approssimata conduce a concludere che la foglia cade più lentamente del sasso; è questo il contenuto della "sensata esperientia" che veniva opposta a Galileo dai suoi oppositori. Ma il vantaggio della spiegazione che Galileo dava del fenomeno rispetto alle altre (accettate dai dotti del tempo) era fondato sulla scelta di una legge per così dire 'principale', che regge la caduta di tutti i gravi nel vuoto; e nell'attribuire le differenze, constatate nelle osservazioni quotidiane, a delle 'perturbazioni', cioè a delle cause che sono considerate come *meno importanti* rispetto al fenomeno puro, che è quello che veramente conta.

Ovviamente questa scelta di una causa 'importante' o addirittura 'principale' del fenomeno che si vuole spiegare è un atto che non è pienamente giustificato a priori. Tuttavia questa classificazione delle cause, cioè delle spiegazioni, a seconda dell'importanza quantitativa degli effetti che esse provocano è abbastanza naturale, perché si fonda sulla intuizione di una proporzionalità tra cause ed effetti, che risale alla fisica greca e risente ovviamente del concetto di proporzionalità che viene espressa, nella sua forma elementare, dal teorema di Talete.

Ma questo schema della proporzionalità degli effetti alle cause che li producono, appare frequentemente come approssimato e spesso sfiora la falsità quando si cerchino delle spiegazioni più esaurienti dei fenomeni che si osservano.

Invero si potrebbe dire che questa legge di proporzionalità, per quanto — ripetiamo — abbastanza naturale come spiegazione di prima approssimazione, non risulta valida in moltissimi casi, specialmente nel caso delle scienze che trattano della vita e della società umana. In queste scienze appaiono spesso dei fenomeni che dipendono con discontinuità dal fatto di aver superato certe 'soglie', certi 'livelli critici' e quindi non rispettano la ipotesi di proporzionalità che quasi sempre vale nelle scienze

fisiche e nella meccanica in particolare. Del resto, anche nella fisica, quella continuità della cause e degli effetti, che vale in prima approssimazione e che è condizione necessaria (ma non sufficiente) perché si possa adottare lo schema esplicativo della proporzionalità, spesso deve essere abbandonata quando si ricerchi una spiegazione più completa, che renda conto di quegli aspetti della esperienza che non vengono spiegati dallo schema semplice della proporzionalità.

Un caso tipico è fornito dalla ipotesi della costituzione discreta della energia (quanto di azione di Plank) che, nella prima metà di questo secolo, dovette essere formulata per rendere ragione di certi fenomeni non altrimenti spiegabili. Ipotesi che corrisponde alla 'granularità' della materia che da molto tempo era già stata adottata per spiegare certi fenomeni della fisica e della chimica.

Si può quindi pensare che la continuità della materia e della energia sia soltanto una proprietà che la nostra immaginazione attribuisce in prima approssimazione a questi oggetti di osservazione; e che anche la proporzionalità pura, che è considerata una delle spiegazioni elementari della conoscenza quantitativa della realtà, sia soltanto uno schema valido di prima approssimazione.

Ciò non significa ovviamente che le spiegazioni della fisica matematica siano false in senso assoluto; significa soltanto che ogni teoria fisico-matematica deve essere presentata con esplicita menzione dell'ambito della sua validità; in particolare con la menzione esplicita dell'ordine di grandezza degli errori che vengono trascurati anzitutto nelle misure di osservazione e poi nelle misure di controllo e verifica.

4. — Abbiamo visto che nella costruzione di una teoria scientifica, cioè nella ricerca di una spiegazione dei fenomeni che ci appaiono, entra in modo fondamentale una fase che potremmo chiamare 'deduttiva', cioè una fase in cui la deduzione di conseguenze verificabili da ipotesi non direttamente verificabili permette di convalidare oppure di confutare le ipotesi stesse e quindi accresce la conferma della loro validità oppure costringe ad abbandonarle.

Ci pare di poter affermare che in nessun caso viene contestata la legittimità della esistenza di questa fase della costruzione di una spiegazione dei fenomeni; le eventuali analisi e le possibili critiche vertono piuttosto sulla determinazione di procedimenti che siano inoppugnabili e facilmente verificabili, in modo da poter evitare, nei limiti del possibile,

che fra le ipotesi formulate e le loro conseguenze dedotte si possano introdurre degli errori di deduzione formale.

Questa osservazione conduce a formulare una ipotesi di spiegazione, almeno parziale, del successo della matematizzazione della scienza della natura; processo che è incominciato con Galileo e continua tuttora, anzi si espande, pervade con le sue propaggini anche le scienze diverse dalla fisica e dalla chimica, e tende ad includere nel suo dominio, sotto un certo aspetto, anche la logica, almeno del capitolo ristretto della logica simbolica.

Vale la pena di ricordare che la esaltazione del metodo sperimentale, inteso come procedura principale per acquisire la massima certezza a proposito delle realtà che si osservano, data dall'epoca di Galileo.

Ma vorremmo anche osservare che in Galileo si incontra un altro aspetto, che noi riteniamo molto importante, e caratteristico della scienza modernamente intesa; infatti troviamo in Galileo la affermazione esplicita del fatto che la matematica è il linguaggio principale della scienza. Vorremmo ricordare a questo proposito per esempio il celebre passo del "Saggiatore":

"...la filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscere i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a interderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto."

Possiamo parafrasare questo passo dicendo che Galileo afferma che la matematica è il linguaggio fondamentale della scienza, cioè lo strumento linguistico principale per rappresentare la natura e leggere nei fenomeni di questa.

Sappiamo che la storia gli ha dato ampiamente ragione, perché a partire dalle leggi della gravitazione universale enunciate da Isacco Newton, i secoli successivi hanno visto una progressiva matematizzazione della spiegazione scientifica della realtà.

Effettivamente la matematica è diventata via via la lingua nella quale sono stati espressi i fenomeni della meccanica classica (compresi quelli dell'astronomia) e poi i fenomeni della fisica (compresi quelli del calore, cioè i fenomeni irreversibili), poi i fenomeni che riguardano le decisioni

economiche dell'uomo in condizioni di informazione incompleta (con il calcolo delle probabilità) e via via — come abbiamo detto — le strutture formali deduttive della logica, con l'algebra di Boole e la teoria del calcolo delle proposizioni.

Pensiamo quindi che valga la pena di cercare di identificare qualche ragione del successo della matematizzazione della scienza, e di mettere in evidenza alcune circostanze che ci sembrano importanti.

A tal fine osserviamo anzitutto che l'impiego della matematica permette di rappresentare e di identificare gli oggetti della scienza con una chiarezza ed una precisione molto maggiore di quella che si potrebbe ottenere con le descrizioni fatte utilizzando il linguaggio comune. Invero quest'ultimo permette delle descrizioni degli oggetti che spesso sono prevalentemente qualitative, mentre l'impiego dei numeri ed in generale del simbolismo matematico permette una precisione molto maggiore: per esempio le informazioni che si danno dicendo che un determinato corpo è caldo oppure freddo sono molti minori e molto meno precise di quelle che si danno precisando con un numero la temperatura del corpo stesso.

Osservazioni analoghe possono essere ripetute per quanto riguarda la misura delle grandezze che interessano la fisica. Questa precisione nella descrizione dello stato delle cose permette poi di esprimere in modo molto più preciso le relazioni tra gli oggetti e quindi i fenomeni che interessano l'analisi scientifica. Ancora una volta, ciò appare evidente quando si confronta, per esempio, la descrizione esatta del fenomeno della caduta dei gravi nel vuoto che si ottiene con gli strumenti della matematica, con quelle puramente qualitative che si possono dare con parole.

Possiamo concludere quindi osservando che la esattezza della descrizione è un primo grande vantaggio dell'impiego dei mezzi matematici nella rappresentazione della realtà e degli oggetti che le scienze vogliono studiare; si può tuttavia osservare che esiste un secondo grande vantaggio nell'impiego degli strumenti matematici.

Invero quando si descrivono le cose mediante numeri, e le relazioni tra di esse mediante relazioni matematiche (per es. mediante equazioni, algebriche o differenziali ed altri mezzi), è possibile rendere molto sicuro e per così dire automatico il procedimento di deduzione che fa passare dalle ipotesi alle conseguenze controllabili e sperimentalmente verificabili; tale deduzione infatti, in questo caso, si riconduce ad un calcolo, cioè alla applicazione delle leggi dell'aritmetica o in generale dell'algebra e del calcolo infinitesimale; e tale procedimento è controllabile da chiunque e ha i caratteri della più grande generalità e sicurezza.

Va ricordato che questa circostanza era già stata considerata da G.G. Leibnitz, il quale aveva preconizzato la invenzione e l'adozione di un sistema di simboli logici, i quali rendessero possibile ridurre la deduzione ad un calcolo, cioè ad una operazione di trasformazione di formule, che si fa seguendo certe leggi stabilite prima, leggi che reggono, appunto, la manovra dei simboli. Si consideri per esempio il seguente passo di Leibnitz, tradotto liberamente dell'originale latino:

“ ... pertanto, quando vi fossero delle divergenze di opinione, non sarà necessario fare delle discussioni tra dotti, non più di quanto esse siano necessarie tra due esperti di computisteria. Basterà infatti sedersi ad un tavolo con la penna in mano (chiamando, se si vuole, un amico ad assistere) e dire: ‘calcoliamo’ ...” ()*

Va osservato tuttavia che la rappresentazione della realtà mediante i simboli della matematica presuppone che si accettino in via preliminare certe proprietà della realtà che si vuole rappresentare. Per esempio si può osservare che la rappresentazione più precisa ed utile per la ulteriore elaborazione è quella che si ottiene con la operazione di misura: procedimento che tutti conoscono, perché fa parte del patrimonio di matematica elementare che viene acquisito da ogni cittadino delle nazioni civili e che viene utilizzato ogni giorno nella vita associata. Orbene, perché si possa misurare un oggetto, è necessario che questo possieda certe proprietà che fanno appartenere tale oggetto alla classe delle “grandezze” (intendendo questo termine nel senso tecnico preciso diverso dal senso generico che spesso gli si attribuisce nel linguaggio comune).

Molto spesso non è possibile misurare le cose che interessano, ed occorre limitarsi a fare dei confronti, oppure a dare degli indici che traducono il comportamento di folle di oggetti, come avviene quando si adottano i metodi della Statistica.

Ricordiamo inoltre che l'impiego dello schema matematico conduce ad adottare anche lo schema della proporzionalità, diretta o inversa, o, in generale, a tradurre le relazioni esistenti in realtà tra le cose con le leggi che vengono giudicate ‘semplici’; ma la qualità di ‘semplicità’ di una legge matematica viene valutata con criteri che sono tipicamente soggettivi e dipendono dalla formazione culturale, dall'intelligenza e dai gusti di chi giudica. Pertanto è comprensibile che la rappresentazione della

(*) “Quo facto, quando orientur controversiae, non magis disputatione opus erit inter duo philosophos, quam inter duo computistas. Sufficiet enim ealamos in manus sumere sedereque ad abacos et sibi mutuo (accito si placet amico) dieere: calculemus!”.

realtà sia sottoposta a drastiche semplificazioni e risulti talvolta addirittura rudimentale o lontana dalla verità.

Questa situazione potrebbe essere descritta in modo sommario e rudimentale dicendo che nella spiegazione fisico-matematica della natura ciò che si guadagna nella certezza della deduzione si perde forse in profondità nella conoscenza.

CAPITOLO II
LA LOGICA CLASSICA

CAPITOLO II

LA LOGICA CLASSICA

1. — Convenzionalmente parleremo di ‘logica classica’ per indicare tutto l’insieme di studi di logica che ebbe luogo prima della metà del secolo XIX; la denominazione è puramente convenzionale e largamente generica, come si vedrà in seguito; tuttavia appare per il momento adeguata per descrivere e designare quell’insieme di dottrine di logica che utilizzano, nella espressione dei concetti e delle relazioni logiche e nella elaborazione delle deduzioni, i mezzi forniti dai vari linguaggi comuni, cioè le lingue viventi nei periodi e nei paesi nei quali di volta in volta tali studi ebbero a fiorire: per es. la lingua greca, la latina, l’italiana volgare, la francese e così via.

Abbiamo ricordato delle scuole di pensiero che spaziano su diversi secoli e si riattacano a movimenti filosofici di diversissima impostazione; ma l’aspetto che prenderemo in considerazione sarà abbastanza uniforme, e soprattutto il livello a cui intendiamo tenere questa trattazione non renderà particolarmente grave la necessaria superficialità della analisi.

2. — Una semplice riflessione mostra che il linguaggio comune serve all’uomo per molti scopi di comunicazione, e vogliamo qui distinguere tra la comunicazione di concetti e quella di emozioni. Dal nostro punto di vista ci interessa soltanto la comunicazione di concetti e di rapporti tra di essi; la comunicazione di emozioni e di stati d’animo non entra nella considerazione della logica e in particolare nella nostra.

Nelle lingue occidentali la comunicazione di concetti e delle loro relazioni avviene mediante frasi pronunciate o scritte, che contengono delle parole che sono chiamate ‘termini’.

Appare del tutto naturale il desiderio che il significato di ogni termine che si usa sia sempre precisato in modo inequivocabile. Ed a questo proposito appare utile soffermarsi un poco a riflettere sulla operazione mentale e logica che dovrebbe servire a precisare il significato dei termini, operazione che viene chiamata 'definizione'.

Si chiama abitualmente così una proposizione la quale fornisce il significato di un termine prima ignoto per mezzo di altri termini che si suppongono noti. Per es. se supponiamo che un ascoltatore o un lettore ignori il significato del termine "automobile" potremmo scrivere la seguente definizione:

"automobile è un veicolo da trasporto a quattro ruote, destinato a viaggiare su strada, ed avente un motore che gli permette di spostarsi senza interventi di forze esterne".

Con questa proposizione, o con altre più precise e circostanziate, possiamo pensare di aver fatto conoscere il significato del termine 'automobile' alla persona che prima non lo conosceva o che lo possedeva soltanto in forma approssimata.

È appena necessario ripetere che, affinché il procedimento possa essere considerato ragionevole, è necessario che nella proposizione scritta figurino dei termini che si suppongono noti nei loro significati: tali sono per es. i termini: quattro, ruote, strada, viaggiare, spostarsi ecc.'. È chiaro infatti che se cercassimo di spiegare e precisare il significato di un termine ignoto per mezzo di altri termini che non sono conosciuti precedentemente nei loro significati, il nostro discorso non potrebbe raggiungere lo scopo prefissato.

Scende di qui che non è possibile definire tutti i termini che utilizzano nel discorso mediante il linguaggio comune: in alte parole vi sono alcuni termini cui significato è acquisito o si intende acquisito mediante quella che viene chiamata la 'definizione ostensiva', cioè, come dicevano i medievali, 'per additamentum': mostrando all'interlocutore l'oggetto mentre si pronuncia o si scrive il termine linguistico che lo simboleggia.

Tale sarebbe il procedimento che dovremmo adottare se per es. dovessimo incominciare a comunicare con uno straniero che non conosce nessuna parola della nostra lingua e della cui lingua, reciprocamente, noi non conosciamo alcuna parola. A ben riflettere, tale è anche il procedimento con il quale il bambino impara a parlare; imitando chi convive con lui, correggendosi, acquisendo via via con l'uso e la pratica i nomi delle cose che lo circondano e le espressioni che significano le azioni che egli compie.

Non pare che sia possibile un procedimento diverso per comunicare dei concetti, almeno in una prima fase di apprendimento.

Quando si studia la logica quindi, ma anche quando si studia una scienza qualesivoglia, cioè ogni volta che si cerca di dare una sistemazione razionale delle nostre conoscenze e dei nostri concetti, è necessario supporre che il nostro interlocutore conosca il significato di un certo numero di termini che noi utilizziamo per comunicare verbalmente e sul cui significato noi ci accordiamo con lui.

La stessa procedura è seguita, a ben riflettere, in ogni dizionario, il quale abitualmente non fa che spiegare il significato di certi termini mediante quello di altri che il compilatore del dizionario ritiene noti. Pertanto si potrebbe dire che un dizionario logicamente ben fatto dovrebbe portare all'inizio, senza spiegazione né definizione, un elenco dei termini il cui significato non verrà spiegato, e si ritiene noto al lettore. In mancanza di che il dizionario si riduce ad essere un elenco di sinonimi dei termini, che innescano una serie di rimandi la quale si chiude su se stessa senza fornire alcuna spiegazione: per es. si otterrebbe una situazione simile con un dizionario che al termine "salto" portasse: 'vedi "balzo"' ed al termine "balzo" portasse 'vedi "salto"'.

Tutte queste esigenze sono scarsamente rispettate nella pratica quotidiana, e nella stesura dei dizionari che si trovano in commercio. Tuttavia è necessario prenderle in considerazione quando si vuole fare una analisi rigorosa del nostro modo di pensare e di comunicare i nostri pensieri. In questo caso infatti è di regola che si indichi esplicitamente e chiaramente quali sono i termini che si ritengono noti nel loro significato; o meglio, quali sono i termini che non vengono definiti mediante una proposizione del tipo di quella che abbiamo scritto poco fa, e che invece conducono semplicemente ad un procedimento di verifica del fatto che gli interlocutori, nei casi concreti e particolari che si presentano, conferiscano lo stesso significato ai termini stessi e li usino nello stesso modo. Abitualmente i termini che non vengono definiti mediante un discorso del tipo di quello che abbiamo fatto poco fa a proposito del termine 'automobile' vengono chiamati 'termini primitivi'.

A questo proposito osseviamo inoltre che un determinato termine non è primitivo 'in sé'; il fatto che esso sia assunto come primitivo in una certa trattazione non esclude che lo stesso termine possa essere definito, quando si assumano come primitivi altri termini in numero sufficiente; la cosa che interessa qui mettere in evidenza è che non si può fare a meno, in una esposizione rigorosa, di assumere certi termini come

noti senza definizione. Ma quali siano questi termini ed il loro numero non può essere stabilito a priori; la loro scelta costituisce, come dice U. Cassina, un "atto di imperio del trattatista". Ed intendiamo indicare con questa espressione una scelta che non può essere giustificata mediante una dimostrazione logica, nel senso abituale del termine.

Ciò che abbiamo detto fin qui si applica in particolare a certi termini della logica e della matematica nei quali dovremo far uso più tardi; si applica per esempio al termine 'insieme' e ad altri collegati con questo, che avremo occasione di utilizzare in seguito.

Considerazioni analoghe possono essere fatte a proposito dei termini primitivi che vengono utilizzati nella analisi dei fondamenti della aritmetica e della geometria .

Si potrebbe dire che proprio le ricerche sui fondamenti di quest'ultima scienza abbiano dato luogo a quelle precisazioni che abbiamo cercato di esporre nelle pagine precedenti. Invero proprio la geometria ha fornito i primi esempi di quel procedimento che viene abitualmente chiamato di 'definizione implicita' dei termini, o anche 'definizione per postulati' oppure anche da qualche Autore 'definizione d'uso'.

Vorremmo ricordare infatti che nella concezione classica che si aveva della geometria, questa dottrina era considerata come una scienza caratterizzata dai suoi contenuti: una scienza che parla di certe cose, che osserva le proprietà evidenti dei suoi oggetti e dimostra rigorosamente mediante il ragionamento le proprietà che sono meno evidenti e più riposte.

Questa concezione classica è stata demolita dalla scoperta delle cosiddette "geometrie non-euclidee", cioè dalla scoperta che anche senza ammettere come vero il postulato euclideo della unicità della parallela mandata ad una retta da un punto fuori di essa, si potevano costruire delle dottrine che non presentavano nulla di contraddittorio.

L'analisi logica alla quale i matematici furono costretti da questa scoperta li condusse a convincersi che non è possibile definire tutto, e che è necessario accettare certi concetti come primitivi e rinunciare a definirli mediante discorsi del tipo classico; occorre invece accettare che tali concetti siano in certo modo circoscritti da postulati, cioè da proposizioni che vengono enunciate senza dimostrazione. Va ricordato tuttavia che, quando si adotti questo punto di vista, sorgono dei problemi logici di notevole importanza: invero se si rinuncia ad un aggancio alla realtà esteriore come fondamento del rigore ultimo della nostra conoscenza, e si accetta che le proposizioni iniziali di una dottrina siano scelte con criteri di una certa libertà, nasce il problema di garantire la non contraddittorietà

di tali proposizioni. Questo problema è stato occasione di notevoli studi di logica matematica nella prima metà del nostro secolo, studi che hanno avuto il loro culmine nei classici teoremi di K. Godel.

Non ci è possibile proseguire ora in questa direzione; vorremmo aggiungere che, nel caso delle scienze particolari, quando non si tratti di concetti fondamentali, la definizione di un ente viene ottenuta assegnando delle classi sempre meno estese a cui l'ente appartiene.

Ci pare che sia tipico a questo proposito il caso della zoologia, nella sua impostazione classica, la quale suddivide gli animali secondo insiemi, ciascuno contenuto nel precedente, che danno la possibilità di determinare nella maggior parte dei casi la specie a cui l'animale considerato appartiene. Come è noto, tali insiemi sono chiamati successivamente: tipo, classe, ordine, famiglia, genere, specie, con la possibilità di determinare anche dei sottotipi, dei sottordini, delle sottoclassi, delle sottospecie e così via. Per esempio il cane domestico, secondo la classificazione zoologica cui accenniamo, viene determinato prendendo in considerazione successivamente gli insiemi seguenti, sempre meno estesi:

<i>tipo</i>	cordati
<i>sottotipo</i>	vertebrati
<i>classe</i>	mammiferi
<i>sottoclasse</i>	euteri
<i>ordine</i>	carnivori
<i>sottordine</i>	fissipedi
<i>famiglia</i>	canidi
<i>genere</i>	canis
<i>specie</i>	domesticus

Tutti sanno poi che la specie 'canis domesticus' si suddivide in sottospecie ed in razze.

3. — Quando si tratta delle procedure elementari della deduzione si possono svolgere delle considerazioni analoghe a quelle che abbiamo esposto poco fa, a proposito dei termini primitivi di una teoria. Come si vedrà, a proposito di questi procedimenti, faremo largo uso di esempi: per esempio quando si tratterà di giustificare la validità dello schema BAR-BARA del sillogismo e quando si tratterà delle regole di inferenza immediata. Qualcuno potrebbe osservare che l'addurre un esempio non costituisce la dimostrazione della validità generale di un procedimento; tut-

tavia siamo convinti che non sia possibile svolgere delle dimostrazioni formalmente analoghe a quelle della matematica o della geometria per giustificare i procedimenti fondamentali che la nostra mente segue per concludere validamente. A questo proposito ci pare che si possano seguire soltanto due strade: l'una consiste nell'accettare la validità delle procedure fondamentali sulla base di esempi, lasciando che ognuno giunga poi personalmente alla massima generalizzazione possibile sulla base degli esempi esposti; l'altra strada porterebbe a cercare di dimostrare la validità di questi schemi fondamentali di deduzione mediante ragionamenti. Ma ci pare di poter osservare che i ragionamenti che si potrebbero svolgere sarebbero anch'essi del tipo di quelli che si vogliono giustificare. Si cadrebbe così nel circolo vizioso che consiste nel supporre valide quelle forme di ragionamento che si vorrebbero giustificare.

In questa situazione noi preferiamo la prima strada e scegliamo di fare appello alla intuizione ed alla capacità di generalizzazione di ogni ascoltatore o lettore.

Ci pare comunque chiaro che, per intraprendere l'analisi delle regole che si debbono seguire per ben ragionare, è necessario soffermarsi un poco ad analizzare gli strumenti di cui ci serviamo per esprimere le nostre idee e comunicarle agli altri. In particolare sarà utile analizzare le frasi aventi un senso compiuto per ritrovare e riconoscere i loro costituenti, in modo da poter renderci conto della struttura della nostra comunicazione di concetti e della concatenazione delle frasi tra loro. Pertanto sarà necessario introdurre varie distinzioni, che noi presenteremo nella misura strettamente necessaria per intendere il linguaggio tecnico della logica classica.

A tal fine consideriamo per esempio la frase:

“Tutti gli uomini sono mortali”.

In questa frase l'analisi logica distingue un termine composto: “tutti gli uomini” che è il soggetto, un termine “mortali” che è il predicato, ed una copula verbale espresso qui dalla terza persona del presente indicativo del verbo “essere” che in questa frase suona “è”.

Si potrebbe osservare che non sempre tutte le frasi del linguaggio comune, anche quelle che non trasmettono emozioni o stati d'animo ma si limitano a comunicare delle informazioni, hanno la struttura della frase ora considerata, che ha un soggetto, un predicato ed una copula verbale. Ma si risponde osservando che entrano nella considerazione della logica

soltanto quelle che possono essere facilmente ricondotte a questa forma; per esempio la frase "Piove" che sembra non avere quella struttura può essere ricondotta a quella forma, considerando l'enunciato equivalente:

"Il tempo atmosferico è piovoso".

Tornando alla frase "Tutti gli uomini sono mortali", si può dire che essa ci si presenta come attribuzione di un determinato predicato (mortalità) a determinati soggetti (che sono tutti gli uomini)

Il soggetto a sua volta è composto da due termini: uno 'gli uomini' che ha significato anche preso da solo; per questa ragione esso viene chiamato "categorematico"; secondo un termine (espresso dalla parola "tutti") che ha significato soltanto insieme con altri termini; questa sua proprietà viene espressa dicendo che tale termine è "sincategorematico".

Questa distinzione costituisce il primo passo della analisi dei nostri mezzi espressivi (dal punto di vista della logica) che faremo brevemente nelle pagine seguenti, e che si articolerà nella analisi dei termini, in quella delle proposizioni, ed infine in quella della concatenazione delle proposizioni tra loro. Tuttavia, prima di esporre in modo sommario le distinzioni fondamentali che sono necessarie per poter utilizzare il linguaggio comune nella logica deduttiva, vorremmo osservare che queste distinzioni sono soltanto una parte delle precauzioni che si debbono prendere in questi casi.

Tali precauzioni sono in molta parte dovute al fatto che il linguaggio comune utilizza dei termini il cui significato non è sempre ben determinato, è spesso ambiguo, e viene determinato in modo preciso soltanto dal contesto del discorso.

Ciò porta alla difficoltà nella procedura della deduzione, per la possibilità di introdurre, anche senza volerlo, vari significati durante il procedimento e quindi per il pericolo di non ottenere quella sicurezza e certezza delle conclusioni che invece sono fondamentali per la utilizzazione del linguaggio ai fini della conoscenza certa.

La ambiguità del linguaggio comune è del resto difficilmente eliminabile, e fa parte delle caratteristiche di questo mezzo di espressione, caratteristiche dovute anche al fatto che esso è — per così dire — uno strumento che vive, insieme con la società che lo utilizza. Pertanto appare del tutto naturale il fatto che un medesimo termine possa avere molti significati e possa essere preso in sensi anche molto diversi tra loro.

Per convincersi di questo basta consultare un qualunque dizionario delle lingua italiana. Per es. Ferdinando Palazzi nel "Novissimo diziona-

rio della lingua italiana”, alla voce “fine” distingue anzitutto tra l’impiego della parola come aggettivo nel senso di “squisito, fino, delicato, sagace, arguto, sopraffino” e l’impiego della stessa parola come sostantivo; il quale a sua volta può essere impiegato come avente il genere maschile oppure il genere femminile. E nell’impiego come sostantivo il dizionario enuncia i seguenti sinonimi, i quali danno spesso dei significati lievemente diversi, come il lettore può constatare direttamente:

“cima, chiusa, cessazione, compimento, esito, finale, fondo, estremo, estremità, perfezione, riuscita, successo, termine, meta, limite, confine”.

Tutti sanno che la scelta di uno piuttosto che dell’altro dei significati qui elencati può essere fatta, quando sia possibile, in base al contesto del discorso, cioè in base alla considerazione simultanea di altre parole che vengono pronunciate o scritte insieme con quella di cui si tratta. Il che costringe l’ascoltatore o il lettore a sospendere il giudizio sul significato di un termine fino a quando questo significato non possa essere chiarito dalla lettura o dalla ascoltazione di altri.

Questa precisazione può avvenire in molti modi; per es. nel caso del termine ‘fine’ di cui si sta parlando, può essere ottenuta facendo attenzione al genere che si attribuisce al vocabolo. Per cui, per es. in lingua italiana, nelle due frasi: “Il fine dell’impresa” e “La fine dell’impresa” il termini ‘fine’ ha chiaramente significato di “scopo” nella prima e di “esito, termine” nella seconda. Tuttavia è possibile che il significato di una espressione non possa essere chiarito che da un esame che si riferisce ad un contesto molto ampio, che supera la portata di una sola frase. Si consideri per es. la frase: “Il timore del soldati era grande”; dal solo esame di essa non si può decidere se si tratti del timore che i soldati avevano del nemico o della guerra, oppure del timore che la popolazione aveva dei soldati; soltanto una analisi delle altre frasi con senso compiuto può far decidere per l’una o per l’altra interpretazione. Osserviamo di passaggio che queste circostanze, ed altre che si potrebbe ricordare, costituiscono una parte delle difficoltà della traduzione di un testo da una lingua ad un’altra, e delle difficoltà che presenta ancora oggi il problema della traduzione automatica dei testi.

Si può osservare infine che la ambiguità delle espressioni e dei termini è di grande difficoltà per l’impiego di una lingua come mezzo di espressione nella conoscenza scientifica. Invero, laddove l’opera poetica o artistica in generale trae vantaggio da espressioni che non hanno significato

preciso e quindi sono sfumate, allusive, evocanti, consonanti con altre, la utilizzazione scientifica del linguaggio è invece gravemente danneggiata da queste circostanze. Ne consegue che, per la utilizzazione della scienza, vi è la tendenza alla creazione di 'linguaggi tecnici' come quello della medicina, del diritto, o della economia e di altre scienze; linguaggi nei quali viene utilizzata per es. una lingua morta, come il latino, per esprimere dei concetti in modo che siano di significato invariabile col tempo e con le modificazioni della lingua viva; viene creato un insieme di vocaboli "ad hoc" con radici di una lingua morta, come la lingua greca, come avviene per la medicina, per ottenere sempre lo stesso risultato di utilizzare un determinato vocabolo per esprimere un unico e ben determinato concetto, in modo invariabile.

Gli inconvenienti della lingua viva appaiono ancora più grandi quando si passi dal momento della espressione dei concetti a quello della deduzione di proposizioni valide da altre che si vogliono pure valide.

Queste considerazioni si ricollegano a quelle che già abbiamo svolte nel §4 del Cap. I a proposito dell'impiego del linguaggio matematico nella scienza.

4. — Ci pare abbastanza chiaro quello che vogliamo indicare dicendo che con l'uso delle parole noi intendiamo esprimere e comunicare agli altri uomini dei concetti.

Per es. è chiaro che il concetto di 'uomo' è diverso dalla creatura attualmente esistente e tangibile che incontriamo quotidianamente.

Dal punto di vista della logica ci interessa qui ora anzitutto distinguere due caratteri di un concetto, che vengono indicati come la 'comprensione' e la 'estensione' del concetto stesso.

Per fare un esempio, ci riferiamo a quanto è stato detto al §2 a proposito dell'insieme di classi che definiscono la specie 'canis domesticus'; oppure alla frase che abbiamo scritto per dare una definizione del concetto di 'automobile'.

Con riferimento a quest'ultimo esempio chiameremo 'comprensione' del concetto "automobile" tutte le proprietà che vengono enunciate nel discorso che abbiamo scritto sopra, e che costituiscono la caratterizzazione del concetto che intendiamo esprimere con il termine 'automobile'.

Tuttavia è possibile prendere in considerazione anche l'insieme di tutti gli oggetti attualmente esistenti sulla faccia della Terra e che rispondono a quella definizione che abbiamo cercato di dare con il discorso preceden-

te; questi oggetti semoventi costituiscono un insieme, l'insieme degli **oggetti a cui si può attribuire il termine 'automobile'** secondo il significato che è stato precisato.

Questo insieme costituisce ciò che si vuole indicare come la 'estensione' del concetto "automobile". Appare chiaro che i due concetti, estensione e comprensione del concetto, sono diversi e portano a prendere in considerazione diversi rapporti logici.

Quando parleremo della teoria degli insiemi, dell'algebra di Boole e degli argomenti che vi si riattaccano, avremo anche occasione di dire che la rappresentazione grafica dei rapporti tra i concetti, le relazioni tra gli insiemi simbolizzate dall'algebra di Boole si riferiscono all'aspetto della 'estensione' dei concetti, secondo la denominazione della logica classica.

Non è impossibile formalizzare in modo simbolico anche le relazioni che nascono dalla comprensione dei concetti, ma di fatto la cosa non ha avuto ancora uno sviluppo apprezzabile.

Una seconda distinzione che si può fare, a proposito dei termini del linguaggio comune che noi utilizziamo, si basa sulle seguenti considerazioni: è chiaro che le parole che noi scriviamo o pronunciamo sono dei segni, dei simboli di certe realtà che non si esauriscono nelle parole stesse; in altri termini ogni parola indica una "cosa" (intendendo questo termine nel senso generico, che egli viene dato quando esso viene utilizzato nel linguaggio quotidiano); possiamo tuttavia osservare che la cosa designata da una parola può essere la parola stessa nella sua materialità; ciò è chiarito da esempi come il seguente:

"cane è un animale"

oppure

"cane è una parola di quattro lettere".

Ovviamente nella prima frase il termine designa un oggetto diverso dalla parola, nella seconda frase il termine designa un oggetto che è la parola stessa, in quanto appartiene ad una data lingua, viene scritta con determinate convenzioni e con l'utilizzazione di determinati simboli grafici.

Per distinguere tra le due utilizzazioni della stessa parola, diremo che nel primo caso (quello in cui la parola designa un animale) la parola viene presa in senso "eteronimo", e nel secondo caso il termine viene preso in senso "autonimo".

Per distinguere graficamente i diversi sensi in cui uno stesso termine può essere considerato, da questo punto di vista, si possono utilizzare diverse convenzioni: così nelle trattazioni classiche, che venivano esposte in lingua latina, un termine preso in senso autonomo veniva scritto preceduto dal simbolo 'ly': quindi l'insieme di simboli grafici "ly cane" significava che il termine "cane" veniva preso in senso autonomo, cioè come significante la parola stessa appartenente alla lingua italiana; nelle trattazioni moderne il termine inteso in senso autonomo viene messo tra virgolette: così mentre la parola cane indica l'animale conosciuto da tutti, il simbolo "cane" indica la parola, che in italiano viene scritta con quattro lettere, che indica l'animale di cui sopra.

Una terza distinzione di significato può essere fatta quando si consideri che un determinato termine, mentre viene pronunciato o scritto, può essere preso in sensi diversi a seconda che lo si intenda nella sua pura designazione di certi oggetti, oppure si intenda come implicante tutte le connotazioni che si intendono richiamate dalla comprensione del concetto che viene espresso.

Per es. quando si legge nel Vangelo "I ciechi vedono, i sordi odono...." (Matt. XI,5) ovviamente i termini "ciechi" e "sordi" sono presi non nel pieno loro significato; perché la definizione di "cieco" è quella che si potrebbe dare dicendo "cieco è colui che non vede" e quindi nel momento in cui si dice "ciechi" si dice anche "persone che non vedono". Pertanto se il termine "ciechi" si intende nella completa comprensione del concetto la frase evangelica è chiaramente una contraddizione. Ma non lo è più se si considera il termine "ciechi" nel senso che ci porta a dare ad esso il significato che ci aiuta a designare provvisoriamente gli uomini che erano prima ciechi e che noi continuiamo a chiamare così, anche se essi, avendo recuperato la vista a seguito del miracolo evangelico, non rispondono più alla piena definizione del concetto di "cieco".

Pertanto nel primo caso (quello in cui il termine è preso nel suo significato pienamente rispondente alla definizione) diremo che il termine è preso "in senso formale"; nel secondo caso diremo che esso è preso in senso 'materiale'.

Un'ultima distinzione può essere fatta quando si prende in considerazione il fatto che un termine può essere attribuito ad ogni elemento di un insieme oppure ha senso soltanto se attribuito alla collettività, inscindibilmente considerata; si considerino per es. i seguenti esempi

"Pietro e Giovanni erano apostoli"

e l'altra frase

“Gli apostoli erano dodici”.

Ovviamente nella prima frase il termine “apostoli” è preso in un senso tale che si può dire “Pietro era un apostolo, Giovanni era un apostolo”. Diremo che il termine “apostoli” in questo primo senso è preso in “senso distributivo”. Nel secondo caso invece il termine “apostoli” può essere detto soltanto della collettività degli apostoli presa come un tutto unico, perché soltanto in questo caso si può attribuire ad essa il numero cardinale 12. In questo secondo senso si dice che il termine “apostoli” è preso in senso “collettivo”.

5. — Ciò che abbiamo detto finora ci porta naturalmente ad elencare i tipi di concetti generali, che possono esprimere delle proprietà di determinati soggetti e quindi possono essere presi come predicati di frasi che riguardano gli oggetti stessi. Tali concetti classicamente venivano chiamati ‘predicabili’ ed elencati nel modo seguente: genere, specie, differenza, proprio ed accidente.

Anche in questo caso ci limiteremo a dare degli esempi di questa classificazione, senza pretendere di dare delle definizioni astratte e generali.

Il genere e la specie si riferiscono a concetti che hanno estensioni subordinate; invero il genere tiene sotto di sé varie specie; è appena necessario osservare che questi termini di ‘genere’ e ‘specie’ che ora stiamo utilizzando hanno soltanto una certa analogia con i termini uguali che abbiamo introdotto nel §2; precisamente in quest’ultimo luogo i termini hanno un significato tecnico preciso, riguardante le classificazioni zoologiche, mentre il significato in cui essi sono presi ora è molto più generale.

Tuttavia si può dire che il genere e le specie secondo la accezione che qui diamo a questi termini adempiono ad un ufficio di classificazione analogo a quello che espletavano nel §2 sopra ricordato.

Nell’interno delle classificazioni si possono introdurre delle ulteriori sottodistinzioni, che vengono richiamate coi termini “genere remoto” e “genere prossimo”. Così per es. l’oggetto automobile, si può ritenere classificabile sotto il genere remoto “mezzo di trasporto” sotto il genere prossimo “mezzo di trasporto su strada”.

Cose analoghe si possono dire della specie. Si suol dire poi che la differenza specifica è il concetto che distingue e diversifica la specie che

si intende definire dalle altre che sono contenute sotto lo stesso genere. Così per es. si potrebbe dire che nel genere dei mezzi di trasporto su strada, l'automobile è distinta dalla differenza specifica "con motore interno" che la distingue per es. dalle carrozze a cavalli, che si muovono solo se trainate da motori ad esse esterni.

Il "proprio" è un concetto che, senza entrare come costituente del concetto da precisare, consegue però necessariamente dalla definizione.

Tale sarebbe per es. la designazione dell'uomo come "animale capace di ridere". Infatti nella definizione classica dell'uomo come "animale dotato di ragione" il termine "animale" era considerato come il genere e il termine "dotato di ragione" costituiva la differenza specifica, che per l'appunto era destinata a precisare la specie umana nel genere degli animali.

Tuttavia il fatto di essere dotato di ragione conferisce all'uomo anche la proprietà di essere capace di riso, cioè di poter percepire come comico il distacco dei concetti ideali dalle loro realizzazioni materiali. Pertanto la possibilità e la capacità di ridere costituisce una proprietà dell'uomo che consegue necessariamente la sua razionalità, senza tuttavia costituire la distinzione fondamentale che costituisce la specie umana in mezzo a tutte le altre specie che formano il genere delle creature viventi.

Infine l'accidente rappresenta un concetto che può essere predicato di un soggetto senza tuttavia entrare nella costituzione della specie cui appartiene il concetto stesso né conseguire necessariamente come proprietà necessaria dalla definizione. Tale es. potrebbe essere il predicato 'biondo' attribuito ad un uomo; predicato che non necessariamente consegue dalla definizione dell'uomo, e si distingue dalle proprietà che competono alla specie cui l'uomo appartiene.

6. — Dopo l'analisi dei termini e la distinzione dei vari significati che — nei riguardi della logica — una medesima parola può avere, il secondo grado dell'analisi porta all'esame della proposizione.

In questo primo stadio limiteremo l'analisi alla sola forma esteriore della proposizione, non tenendo conto del contenuto della proposizione stessa.

Invero possiamo prendere in considerazione una medesima proposizione per es. la seguente

"tutti gli uomini sono alti"

da due diversi punti di vista.

Il primo punto di vista riguarda la logica formale, di cui ci occupiamo qui ora; da questo punto di vista la proposizione enunciata viene classificata come “universale ed affermativa”; dal secondo punto di vista si prende in considerazione la corrispondenza della proposizione ad una realtà, materiale oppure non, esistente fuori della proposizione stessa; questo secondo punto di vista riguarda la logica materiale, e sotto questa luce la proposizione viene considerata come vera oppure falsa.

Dal primo punto di vista, cioè nella considerazione della logica formale (minore) le proposizioni vengono distinte secondo la qualità e la quantità. Secondo la qualità una proposizione può essere affermativa oppure negativa; secondo la quantità una proposizione può essere universale oppure particolare.

Per quanto riguarda la forma esteriore, le proposizioni universali sono caratterizzate da termini sincategorematici premessi al soggetto, del tipo ‘tutti’, ‘ogni’ e simili; le proposizioni particolari da termini sincategorematici del tipo ‘alcuni’, oppure ‘qualche’ e simili.

Non ci occuperemo qui delle proposizioni che vengono spesso chiamate ‘singolari’, del tipo “Ambrogio Brambilla è milanese”, che riterremo come dei casi di proposizioni particolari.

In questa analisi si hanno quindi quattro specie di proposizioni, che verranno contraddistinte con simboli convenzionali, i quali ci saranno utili per gli sviluppi del seguito. Da questo punto di vista pertanto una proposizione può appartenere ad una delle quattro classi seguenti:

I) — Universale affermativa

esempio: *tutti gli uomini sono mortali*;

simbolo convenzionale: A.

II) — Universale negativa:

esempio: *nessuno uomo è mortale*

simbolo convenzionale: E.

III) — Particolare affermativa:

esempio: *qualche uomo è mortale*

simbolo convenzionale: I.

IV) — Particolare negativa:

esempio: *qualche uomo non è mortale*

simbolo convenzionale: O.

I quattro simboli convenzionali vengono raccolti spesso in un quadro unico della forma seguente:



Le proposizioni A ed E sono chiamate “contrarie” tra loro. Esse possono essere entrambe false, mai entrambe vere.

Le proposizioni I ed O sono chiamate “subcontrarie” esse possono essere insieme vere, mai insieme false.

Le proposizioni I ed O sono dette, “subordinate” rispettivamente della A e della E.

Queste, a loro volta, sono dette “subordinanti” della I e della O rispettivamente. Infine le proposizioni A ed O ed anche la E e la I sono dette “contraddittorie” tra loro.

7. — Le proposizioni dei quattro tipi fondamentali che abbiamo esposto nel § precedente sono legate tra loro da certe relazioni logiche, le quali permettono di dedurre immediatamente la verità o la falsità di alcune di esse quando sia data la verità o la falsità di qualche altra. Alcune di queste relazioni sono già state presentate, quando abbiamo detto che le proposizioni contrarie possono essere insieme false ma mai insieme vere; e le subcontrarie possono essere insieme vere, mai insieme false. Esporrò qui di seguito tutte le relazioni di questo tipo, che condurranno quindi ad un certo numero di regole che chiameremo di “inferenza immediata”, cioè di regole che permettono — come si è detto or ora — di inferire immediatamente la validità di certe proposizioni a partire dalla validità o meno di certe altre. Tuttavia, prima di enunciare tali regole, ricordiamo qui che nella logica classica si partiva dal presupposto che i soggetti dei quali si parlava fossero effettivamente esistenti; di conseguenza nella logica classica si enunciava la regola secondo la quale dalla verità di una proposizione universale seguiva la validità della subordinata. Così per es. se è vero che tutti gli uomini sono mortali, si pensava valida anche la conseguenza che qualche uomo è mortale.

A rigore questa conseguenza è subordinata alla validità dell'ipotesi che esista qualche creatura umana, ipotesi che nella trattazione classica

si riteneva senz'altro soddisfatta dalla enunciazione della proposizione A, e che comunque noi riterremo pure soddisfatta senza che sia necessario esplicitamente enunciarla, qui e nel seguito, quando tratteremo questioni analoghe a questa. Pertanto noi riterremo che si possa inferire: dalla verità delle subordinanti quella delle subordinate; dalla falsità delle subordinanti quella delle subordinanti.

Infine dalla verità o falsità di una delle proposizioni accettiamo che si possa inferire immediatamente la falsità o la verità rispettivamente della proposizione contraddittoria.

Come abbiamo già detto (cfr. §3) non riteniamo di poter dare delle dimostrazioni formali per queste regole; esse possono facilmente essere verificate su esempi, e sono del resto di impiego quotidiano nella vita comune, senza che alcuno elevi dei dubbi sulla loro validità.

Le regole di inferenza immediata fin qui esposte possono essere riasunte nel quadro seguente, nel quale le colonne corrispondono alle proposizioni dei vari tipi, e nel quale in ogni riga è segnata e messa in un riquadro la proposizione da cui si parte, e della quale sono dati i valori di verità. Sulla stessa riga sono scritti i valori di verità che risultano con certezza dalle regole or ora enunciate. Così per esempio leggendo sulla prima riga si ha che dalla verità A si può inferire immediatamente la verità della I (subordinata), la falsità della O (contraddittoria) e della E (subordinante la O). Invece sulla seconda riga si ha che dalla falsità della A si può inferire soltanto la verità della O (sua contraddittoria).

A	E	I	O
vera falsa	falsa	vera	falsa vera
falsa	vera falsa	falsa vera	vera
falsa	falsa vera	vera falsa	vera
falsa vera	falsa	vera	vera falsa

8. — Le regole di inferenza immediata che abbiamo enunciato nel § precedente non sono le sole che si possono enunciare. Altre sussistono e riguardano la operazione che viene chiamata “conversione” di una proposizione.

Data una proposizione diremo che si opera una conversione se si costruisce una seconda proposizione, che ha come soggetto il predicato della prima e come predicato il suo soggetto.

Così per es. data la proposizione

“Nessun milanese è negro”

si ha, con l’operazione di conversione

“Nessun negro è milanese”.

L’operazione che abbiamo eseguito poco fa, scambiando il soggetto col predicato viene chiamata “conversione semplice”; essa trasforma una proposizione vera in una pure vera quando viene eseguita sulle proposizioni E ed I.

L’esempio sopra esposto mostra la verità di questa affermazione nel caso della proposizione E. Per quanto riguarda la I si consideri la seguente:

“Qualche milanese è biondo”

che, scambiando il posto il soggetto con il predicato si trasforma nella seguente

“Qualche uomo biondo è cittadino milanese”.

Nel caso delle proposizioni E ed A si può ammettere anche la conversione che viene chiamata “conversione per accidens” e che porta a costruire una nuova proposizione scambiando la proposizione del soggetto con quella del predicato e cambiando anche la quantità, cioè trasformando la proposizione da universale in particolare.

Così per es. dalla proposizione

“Tutti i milanesi sono lombardi”

si può trarre soltanto la seguente, convertita per accidens

“qualche lombardo è cittadino milanese”.

Esempi analoghi si possono enunciare per quanto riguarda le proposizioni di tipo E.

Infine si può costruire anche una terza operazione di conversione, scambiando il soggetto con il predicato ed enunciando la proprietà o la relazione da essi indicata con preposizione del termine sincategorematico “non”.

Questo modo di conversione trasforma proposizioni vere in proposizioni pure vere nel caso delle proposizioni di tipo A oppure O, come si può vedere dagli esempi seguenti:

Dalla proposizione di tipo A

“Ogni milanese è lombardo”

si trae la proposizione

“Ogni non lombardo non è milanese”;

e dalla proposizione di tipo O

“Qualche milanese non è biondo”

si trae la

“Qualche non biondo è milanese”.

9. — Finora abbiamo preso in considerazione i casi in cui si può garantire la verità oppure la falsità di una proposizione con regole determinate che abbiamo chiamato di “inferenza immediata”.

La logica tuttavia studia anche degli altri casi in cui la validità di una proposizione viene garantita mediante certe determinate procedure che coinvolgono non una sola, ma almeno due proposizioni che vengono enunciate prima della proposizione considerata e che vengono chiamate “premesse”.

Si consideri il seguente ragionamento:

*“Ogni lombardo è italiano
ogni milanese è lombardo
quindi ogni milanese è italiano”.*

Un ragionamento cosiffatto viene chiamato “*sillogismo*” e porta a garantire la validità della terza proposizione, che viene chiamata “conclusione”, quando sia accettata o garantita in qualche modo la validità delle due premesse.

In un ragionamento cosiffatto il fatto che il predicato “italiano” possa essere detto del soggetto “milanese” è garantito dal passaggio attraverso la enunciazione che afferma che il termine “lombardo” può essere una volta soggetto ed una volta predicato nelle sue due proposizioni che si premettono alla conclusione.

In questo caso il termine “lombardo” viene chiamato “termine medio” o anche brevemente “il medio” del sillogismo.

Noi accetteremo il sillogismo come la procedura tipica che conduce con certezza ad una conclusione non immediatamente evidente di per sé, quando siano date certe premesse.

Come abbiamo visto, questa procedura coinvolge tre termini: il soggetto, il predicato (della conclusione che si vuole dimostrare) ed un terzo termine che viene chiamato termine medio, e che compare nelle premesse ma non nella proposizione conclusiva.

Un ragionamento cosiffatto, per essere valido, deve rispettare certe leggi generali, di cui daremo gli enunciati classici:

- i) i termini non possono essere più di tre;
- ii) la conclusione non può essere più generale delle premesse;
- iii) la conclusione non deve contenere il termine medio;
- iii) almeno in una delle premesse il medio deve essere preso in senso generale;
- v) due premesse negative non portano ad alcuna conclusione;
- vi) due premesse affermative non possono dare una conclusione negativa;
- vii) due premesse particolari non portano ad alcuna conclusione;
- viii) la conclusione segue sempre la parte peggiore (cioè è particolare se una delle premesse è particolare, è negativa se una delle premesse è negativa).

Le argomentazioni che non rispettano queste leggi vengono chiamate “paralogismi” (parola derivata dal greco che significa ‘ragionamenti errati’) oppure anche “sofismi”, quando vengano formulati con l’intenzione di trarre in inganno la parte avversa nella discussione.

Per esempio contravviene alla prima legge il ragionamento seguente:

*Gli apostoli erano dodici
Pietro e Giovanni erano apostoli
Dunque Pietro e Giovanni erano dodici.*

Infatti questo ragionamento contiene quattro e non tre termini, perché il termine “apostoli” è preso una volta in senso collettivo (nella prima proposizione) ed un'altra volta in senso distributivo (nella seconda) (cfr. §4)

Una argomentazione di questo tipo veniva spesso chiamata col termine latino “vulpecula” (che significa ‘piccola volpe’, probabilmente perché la volpe è un quadrupede considerato comunemente astuto ed ingannatore).

Altri esempi di argomentazioni fallaci perché contravvengono ad almeno una delle leggi generali si costruiscono facilmente.

10. — Abitualmente vengono presi in considerazione tre tipi di sillogismo; ognuno di questi tipi viene chiamato “figura”, con termine classico. Ogni figura si caratterizza per il posto che il termine medio assume nelle due premesse.

Il sillogismo della prima figura è caratterizzato dal fatto che il medio è soggetto nella prima premessa e predicato nella seconda. I sillogismi della seconda figura sono caratterizzati dal fatto che il termine medio è predicato in entrambe le premesse, i sillogismi della terza figura sono caratterizzati dal fatto che il termine medio è soggetto in entrambe le premesse.

Si ritiene superfluo prendere in considerazione una quarta figura, nella quale il termine medio è predicato nella prima premessa e soggetto nella seconda, perché un sillogismo di questo tipo viene immediatamente ridotto alla prima figura, cambiando l'ordine nel quale le premesse sono enunciate, il che non altera la validità del ragionamento.

Una prima superficiale considerazione porterebbe a pensare che in ogni figura si possano avere $64 = 4 \times 4 \times 4$ sillogismi, poiché ognuna delle tre proposizioni può essere di uno dei quattro tipi: A, E, I, O che abbiamo enumerato nel §7.

Tuttavia non tutti questi sillogismi concludono in modo valido, perché ognuno di essi deve rispettare le leggi generali che abbiamo enunciato

sopra. Una analisi di tutti i casi possibili porta ad elencare 19 casi di sillogismi che concludono in modo valido. Tali sillogismi sono ricordati con parole convenzionali, ciascuna contenente tre delle quattro vocali che corrispondono ai tipi di proposizioni che abbiamo considerato sopra.

Come vedremo nei §§ seguenti, nel caso dei sillogismi della seconda e della terza figura (tranne due eccezioni di cui diremo), tali parole indicano certe procedure mediante le quali i sillogismi corrispondenti possono essere ricondotti ad una delle quattro forme della prima figura che vengono chiamate “perfette”. Tali forme sono rappresentate convenzionalmente dalle seguenti parole

BARBARA CELARENT DARI1 FERIO.

Ci rifacciamo a ciò che abbiamo detto sopra nel §3 a proposito dell'accertamento della validità dei ragionamenti che corrispondono a questi schemi. Pertanto ci limitiamo a presentare alcuni esempi caratteristici lasciando al lettore di convincersi della validità dei ragionamenti nella generalità dei casi.

BARBARA

Tutti i lombardi sono italiani

Tutti i milanesi sono lombardi

Tutti i milanesi sono italiani.

CELARENT

Nessun uomo di razza negra è italiano

Tutti gli africani sono di razza negra

Nessun africano è italiano.

DARI1

Tutti i mammiferi sono animali a sangue caldo

Qualche animale che vola è mammifero

Qualche animale che vola è a sangue caldo.

FERIO

Nessun lombardo è di razza negra

Qualche italiano è lombardo

Qualche italiano non è di razza negra.

Ovviamente gli esempi sopra riportati non vogliono enunciare delle verità assolute di fatto: semplicemente vogliono dare esempi di concatenazione tra proposizioni, concatenazione che porta alla validità della conclusione in dipendenza della validità delle premesse.

Oltre alle quattro forme di sillogismi che abbiamo presentato, che sono i modi perfetti della prima figura, appartengono alla stessa figura anche altri cinque modi, che sono rappresentati dalle seguenti parole convenzionali:

BARALIPTON CELANTES DABITIS FAPESMO FRISESOMORUM

Questi ragionamenti sono abitualmente chiamati “modi imperfetti” della prima figura; essi saranno illustrati e simbolizzati nel §11 del Cap. III, al quale rimandiamo.

11. — Le forme di sillogismo valide della seconda figura sono simbolizzate dalle parole convenzionali seguenti:

CESARE CAMESTRES FESTINO BAROCO.

Questi schemi di ragionamento possono essere ricondotti ai modi perfetti della prima figura (con esclusione dello schema BAROCO di cui diremo in seguito) mediante operazioni che sfruttano le regole di inferenza immediata, di cui abbiamo detto nel §8. Tali operazioni sono indicate dalle consonanti che seguono le lettere indicative delle proposizioni che si trovano nelle parole convenzionali. A tal proposito i significati delle consonanti sono i seguenti:

S indica che la proposizione indicata dalla lettera precedente è sottoposta alla conversione semplice. Tale sarebbe per es. il procedimento che riconduce la forma CESARE dalla seconda figura alla forma CELARENT della prima. Per es. sia il sillogismo

*Nessun italiano è di razza negra
Tutti gli africani sono di razza negra
Nessun africano è italiano.*

La lettera “S” indica che la prima premessa può essere convertita semplicemente, dando

Nessun uomo di razza negra è italiano

con che si ottiene il sillogismo CELARENT della prima che abbiamo già considerato.

In secondo luogo la presenza della lettera M nella parola convenzionale che rappresenta una schema di sillogismo indica che questo può essere ricondotto ad una forma perfetta della prima figura cambiando l'ordine delle premesse.

Si consideri per esempio il seguente sillogismo della seconda figura dello schema CAMESTRES:

Tutti i milanesi sono italiani

Nessun negro è italiano

Nessun negro è milanese.

Le due lettere S indicano che le due proposizioni negative debbono essere convertite semplicemente: la lettera M indica che si deve invertire l'ordine delle due premesse.

Operando in questo modo si ottiene il sillogismo della forma CELARENT della prima figura:

Nessun italiano è negro

Tutti i milanesi sono italiani

Nessun milanese è negro.

Analogamente si opera per un sillogismo dello schema FESTINO, che viene così ricondotto allo schema FERIO, forma perfetta della prima figura. Anche questi sillogismi saranno illustrati nel §12 del Cap. II

Infine i sillogismi validi della terza figura sono rappresentati convenzionalmente dalle parole

DARAPTI FELAPTON DISAMIS DATISI BOCARDO FERISON.

A proposito di queste parole convenzionali ricordiamo che la presenza della lettera P nella parola convenzionale indica che la proposizione rappresentata dalla vocale che precede la P deve essere convertita per accidens per ottenere un sillogismo della forma perfetta della prima figura. Si consideri per esempio la forma DARAPTI

Tutti gli italiani sono contribuenti fedeli
Tutti gli italiani sono europei
Qualche europeo è contribuente fedele.

Convertendo per accidens la seconda premessa si ottiene

Tutti gli italiani sono contribuenti fedeli
Qualche europeo è italiano
Qualche europeo è contribuente fedele

che è un sillogismo della forma perfetta DARII.

Le operazioni di conversione possono essere facilitate dal fatto che i sillogismi della seconda e della terza figura rappresentati da una data parola possono essere ricondotti a sillogismi di forma perfetta della prima rappresentati da parole che hanno la stessa lettera iniziale. Così abbiamo ricondotto DARAPTI e DARII.

Non può essere dimostrata con questi procedimenti la validità delle forme BAROCO e BOCARDO rispettivamente della seconda e terza figura, che richiedono un procedimento più lungo, il quale fa ricorso alla dimostrazione che classicamente viene chiamata "per assurdo".

Si consideri per es. la seguente forma BAROCO:

Tutti gli italiani sono contribuenti fedeli
Qualche europeo non è contribuente fedele
Qualche europeo non è italiano.

Per dimostrare che questo sillogismo conclude validamente si può far ricorso alle leggi che legano le proposizioni tra loro contraddittorie. Secondo tale leggi, dalla verità di una delle proposizioni si inferisce la falsità della contraddittoria e viceversa. Pertanto si dimostra che la conclusione è vera dimostrando che è falsa la sua contraddittoria, che suona

(1) *Tutti gli europei sono italiani*

Con questa proposizione e con la prima del sillogismo esposto si costruisce un sillogismo di schema BARBARA nel modo seguente:

Tutti gli italiani sono contribuenti fedeli
(2) *Tutti gli europei sono italiani*
Tutti gli europei sono contribuenti fedeli.

Ma questa conclusione contraddice la seconda premessa del sillogismo in questione, che dice precisamente:

Qualche europeo non è contribuente fedele.

Tuttavia questa conclusione è stata ottenuta mediante lo schema BARBARA, che è stato supposto valido. Pertanto la sua falsità è dovuta alla falsità di una delle premesse; ma non può essere falsa la prima premessa dal sillogismo (2), che è una delle premesse ammesse valide dal sillogismo di partenza; quindi deve essere falsa la seconda premessa; e questa è la contraddittoria della conclusione del sillogismo in esame. Concludiamo quindi che la contraddittoria della conclusione suddetta è falsa quindi la conclusione è vera, in forza delle leggi di inferenza immediata di cui abbiamo detto nel §7.

Un procedimento analogo si segue per dimostrare la validità dello schema BOCARDO della terza figura. Si consideri il seguente esempio:

Qualche mammifero non ha le ali

- (3) *Tutti i mammiferi sono animali a sangue caldo*
Qualche animale a sangue caldo non ha le ali

anche in questo caso per dimostrare la validità delle conclusioni si dimostra la falsità della sua contraddittoria, che è data dalla proposizione:

- (4) *Tutti gli animali a sangue caldo hanno le ali.*

Questa proposizione, insieme con la seconda premessa del sillogismo (3) dà luogo al seguente sillogismo dello schema BARBARA

Tutti gli animali a sangue caldo hanno le ali
Tutti i mammiferi sono animali a sangue caldo
Tutti i mammiferi hanno le ali.

Ma questa conclusione è la contraddittoria della prima premessa del sillogismo (3); essa quindi è falsa. Ma essa è stata ottenuta applicando la schema BARBARA che abbiamo ritenuto come valido; quindi è falsa una delle premesse. Non può esserlo la seconda, che è una delle premesse ammesse vere nel sillogismo in questione; pertanto è falsa la prima, che

è la contraddittoria della conclusione del sillogismo (3) che stiamo esaminando. Questa conclusione è quindi vera perché la sua contraddittoria è stata dimostrata falsa.

12. — Fino dalla antichità classica l'uomo ha indagato sui problemi della certezza che si può ottenere con la deduzione e sul significato dei procedimenti della logica. Sarà appena necessario ricordare i sofisti greci ed i loro giochi verbali, che miravano a criticare e forse anche a distruggere la fiducia nelle capacità deduttive della ragione umana.

Non è nostro compito fare qui l'analisi del problema filosofico della conoscenza, né indagare sui procedimenti della nostra mente, sui loro fondamenti e sulla loro validità. Tuttavia non possiamo passare sotto silenzio la esistenza di antinomie e di frasi che si contraddicono, perché le questioni di questo tipo sono collegate anche con le ricerche più recenti di logica matematica.

Una delle antinomie più antiche e più discussa è quella che viene detta "del mentitore" o anche del "cretese", perché veniva enunciata spesso nel modo seguente:

"Un cretese dice che tutti i cretesi mentiscono sempre".

Si tratta quindi di una frase che enuncia la propria falsità e che, nell'essere vera, enuncia di essere falsa e nell'essere falsa, realizza il proprio essere vera. Tale frase potrebbe essere sostituita dall'altra più breve "Io mento".

La lettura e l'aneddotica sono ricche di frasi analoghe, le quali presentano le stesse caratteristiche: ci limitiamo a ricordare la frase "È vietato vietare", che ebbe recentemente un momento di celebrità, oppure l'aneddoto del segnale stradale che enuncia "Non tenete conto di questo segnale"; oppure infine il caso umoristico della 'associazione degli ex-presidenti' nel cui statuto vi sono i seguenti articoli:

1° — L'associazione deve avere un presidente

2° — Il presidente della associazione deve essere uno dei suoi soci.

Ovviamente nel momento in cui un socio diventa presidente dell'associazione, cessa di essere un ex-presidente e quindi di far parte della associazione ...

Nei capitoli successivi ritorneremo su questi argomenti e su altri analoghi, che — come abbiamo detto — hanno importanti collegamenti con problemi fondamentali della logica della deduzione.

CAPITOLO III

OPERAZIONI SUGLI INSIEMI ED ELEMENTI DI ALGEBRA DI BOOLE

CAPITOLO III

OPERAZIONI SUGLI INSIEMI ED ELEMENTI DI ALGEBRA DI BOOLE

1. — Alla espressione “logica simbolica” vengono attribuiti significati non sempre costanti ed uguali tra loro. Invero a stretto rigore di termini, ogni parola, pronunciata o scritta, è un simbolo; e quindi anche la logica classica, che utilizza le parole ed i termini del linguaggio comune, può essere considerata una dottrina che opera con simboli.

Noi daremo qui alla espressione “logica simbolica” un significato alquanto generico, designando così la dottrina che tratta della rappresentazione diretta (senza passare attraverso i mezzi del linguaggio comune), con simboli artificiali appositamente costruiti, dei concetti e delle loro relazioni; e che studia le leggi che reggono la formazione e la trasformazione di espressioni costituite da insiemi di simboli elementari.

Nel Cap. II, ed in particolare nel §3 abbiamo cercato di mettere in evidenza le difficoltà che si incontrano quando si voglia impiegare il linguaggio comune nella scienza. Tali difficoltà si manifestano in modo particolare nel fatto che i termini del linguaggio comune non hanno sempre un unico significato, ed anzi il significato di un termine viene quasi sempre precisato solo facendo riferimento al contesto.

Inoltre, nel Cap. precedente abbiamo anche cercato di mostrare le difficoltà che si incontrano quando si voglia utilizzare il linguaggio comune nella deduzione. Queste osservazioni possono giustificare in parte la nascita della logica simbolica; invero in questa dottrina ogni simbolo è artificiale e quindi il suo significato è unico e stabile, e precisamente è quello che gli è stato dato quando il simbolo è stato introdotto. Inoltre, come vedremo, le operazioni che conducono da una espressione ad un'altra sono rette da leggi ben precise, in modo tale che il procedimento deduttivo si avvicina sempre più all'ideale della deduzione matematica, cioè ad

un calcolo, intendendo questa parola come un insieme di operazioni eseguite con determinate regole su certi simboli, per ottenerne degli altri.

Pertanto, in queste condizioni, il controllo dei procedimenti deduttivi diventa molto più facile, e addirittura può essere affidato a delle macchine, le quali garantiscono quindi la applicazione disinteressata delle procedure, senza che la considerazione dei significati dei simboli possa fuorviare le operazioni dal loro fine.

Ci si avvicina quindi a quell'ideale di deduzione che Leibnitz aveva pronosticato nelle due opere, come si evince dal testo che abbiamo citato nel §4 del Cap. I.

Vale tuttavia la pena di osservare che il linguaggio comune non può essere totalmente soppresso, perché il significato dei simboli artificiali e convenzionali, che vengono utilizzati per rappresentare i concetti, deve essere precisato e spiegato facendo ricorso al linguaggio comune, che viene supposto esistente e compreso nei suoi procedimenti e nei suoi significati. Lo stesso si dice delle operazioni di trasformazione delle espressioni simboliche. Pertanto, se ci si pone da questo punto di vista, si potrebbe asserire con ragione che non esiste lingua in cui ogni termine abbia un significato che sia completamente libero da ogni contesto.

Va detto tuttavia che, anche accettando questa osservazione, la presentazione del significato dei simboli artificiali e delle loro leggi è bensì fatta in linguaggio comune (e questa circostanza è insopprimibile ed ineliminabile) ma l'utilizzazione del linguaggio comune viene fatta in una parte ben precisa e delimitata della trattazione e della esposizione di una teoria.

Pertanto si potrebbe descrivere la situazione dicendo che non è possibile sopprimere il contesto quando si tratta di esporre il significato di un simbolo, ma che è possibile delimitare in modo abbastanza preciso l'ambito del contesto; in altre parole, si può pensare che il contesto venga circoscritto e limitato ad una determinata parte della trattazione (quella in cui si espongono i significati dei simboli e le leggi per la loro manipolazione) e non intervenga in ogni proposizione per la precisazione del significato dei termini di volta in volta usati; quindi in particolare è lecito pensare che la indeterminazione e la ambiguità eventuale del significato non intervenga mai nella operazione di deduzione.

2. — Ricordando quanto abbiamo detto nel §2 del Cap. II, assumeremo il termine 'insieme' come un termine primitivo; è possibile dare di questo termine una definizione implicita, mediante un opportuno siste-

ma di postulati, secondo quanto è stato esposto nel § citato. Tuttavia noi faremo appello alla intuizione ed al significato che il termine ha nel linguaggio comune abituale; ci limiteremo quindi a ricordare alcuni termini del linguaggio comune, come gruppo, classe, famiglia, raggruppamento, collezione e così via, intesi nel loro significato generico e senza alcun accenno all'impiego che di alcuni termini viene fatto nel linguaggio di qualche scienza (come avviene per es. con il termine 'famiglia' in zoologia, come abbiamo visto nello stesso § citato).

La teoria degli insiemi ha avuto la sua origine con le ricerche del matematico G. Cantor al quale si deve una celebre frase, che da qualcuno ancora oggi viene presa come una definizione del termine; tale frase suona così:

“Si chiama ‘insieme’ (in tedesco Menge) una collezione (in tedesco Zusammensetzung) di enti considerata come un tutto unico”.

Con riferimento a ciò che abbiamo già detto, non pensiamo che questa frase si possa considerare come una definizione rigorosa e soddisfacente del termine 'insieme', perché in essa viene utilizzata la parola 'collezione' che si presume già nota: il problema viene così spostato sul chiarimento del significato del termine 'collezione'; invero o questo termine viene considerato come già noto, ed allora ci si riduce semplicemente a sostituirlo al termine 'insieme'; questa scelta ovviamente può essere fatta, ma non altera la sostanza del problema logico. Oppure il termine 'collezione' deve essere definito, e si ripropone per questo lo stesso problema che sussiste per il termine 'insieme' che si vorrebbe definire.

Tanto vale quindi assumere come noto e primitivo il termine 'insieme', limitandoci ad enunciare delle frasi nel quale il termine stesso entra, per verificare se siamo d'accordo nell'impiegare il termine con lo stesso significato. Per esempio scriveremo una frase del tipo della seguente: “Le persone presenti ad un certo istante in una certa stanza formano un insieme” oppure anche: “Le parole della lingua italiana scritte in un determinato dizionario formano un insieme” e così via.

Utilizzeremo le lettere maiuscole dell'alfabeto latino per indicare gli insiemi: *A, B, C, ... X, Y, Z...*

Accanto al significato del termine 'insieme' supporremo noto il significato della espressione 'elemento di un insieme'; così, considerato l'insieme *A* di tutti i cittadini di Milano, e considerato un cittadino milanese Ambrogio Brambilla, diremo che il signor Brambilla è un elemento dell'insieme dei milanesi.

Se indichiamo con la lettera a il signor Ambrogio Brambilla, simboleggeremo questo fatto scrivendo la formula

$$(1) \quad a \in A .$$

Il simbolo “ ϵ ” ha una forma simile a quella della lettera greca epsilon, iniziale della parola greca “*estìn*”, terza persona del presente del verbo essere. Quindi la formula (1) può essere letta con la frase “ a (minuscolo) è un (elemento dell’insieme) A maiuscolo”, oppure “l’elemento di nome a (minuscolo) appartiene all’insieme A ” o con frasi di senso analogo.

Prenderemo ora in considerazione alcune relazioni fondamentali tra insiemi, e le loro proprietà. Diremo che due insiemi A e B sono uguali e scriveremo

$$(2) \quad A = B$$

se ogni elemento di A è anche elemento di B e viceversa ogni elemento di B è anche elemento di A .

Per esempio, indicando con A l’insieme dei numeri interi pari e con B l’insieme dei numeri interi che divisi per 2 danno resto uguale a zero, tra i due insiemi sussiste ovviamente la relazione (2).

La relazione tra due insiemi che viene simboleggiata dal simbolo “ $=$ ” possiede certe proprietà che sono analoghe a quelle della relazione di uguaglianza tra numeri; precisamente si hanno le proprietà espresse dalle formule:

$$(3) \quad A = A \text{ (proprietà riflessiva)}$$

$$(4) \quad \text{Se } A = B \text{ allora } B = A \text{ (proprietà simmetrica)}$$

$$(5) \quad \text{Se } A = B \text{ ed anche } B = C, \text{ allora } A = C \text{ (proprietà transitiva).}$$

Dati due insiemi A e B , si dice che A è sottoinsieme di B se avviene che ogni elemento di A è anche elemento di B e si scrive:

$$(6) \quad A \subseteq B ;$$

se poi esiste qualche elemento di B che non è elemento di A si suol dire che A è un “sottoinsieme proprio” di B e si scrive anche

$$(7) \quad A \subset B .$$

Così per esempio l'insieme dei numeri pari è un sottoinsieme proprio dell'insieme di tutti i numeri interi, perché ogni numero pari è anche intero, ma esistono degli interi che non sono pari.

La relazione espressa dalla (6) tra due insiemi A e B viene spesso chiamata 'relazione di inclusione' e l'insieme A viene detto 'incluso' nell'insieme B ; per essa valgono le seguenti proprietà:

(8) se $A \subseteq B$ ed anche $B \subseteq A$, allora $A = B$
(proprietà antisimmetrica)

(9) se $A \subseteq B$ ed anche $B \subseteq C$, allora $A \subseteq C$
(proprietà transitiva).

La relazione espressa dalla (7) viene anche detta 'relazione di inclusione stretta' e l'insieme A si dice 'strettamente incluso' nell'insieme B . Per questa relazione valgono le proprietà transitive espresse dalle formule seguenti

(10) $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } A \subset B \text{ ed anche } B \subseteq C \text{ allora } A \subset C \\ \text{se } A \subseteq B \text{ ed anche } B \subset C \text{ allora } A \subset C \\ \text{se } A \subset B \text{ ed anche } B \subset C \text{ allora } A \subset C \end{array} \right. .$

Ricordiamo infine che il *non* sussistere delle relazioni indicate dai simboli (1), (2), (6), (7) viene spesso indicato convenzionalmente con le formule seguenti

(11) $a \notin A$

che si legge "a non è elemento di A"

(12) $A \neq B$

che si legge "A non coincidente con B" o brevemente "A è diverso da B",

(13) $A \not\subseteq B \text{ e } A \not\subset B$

che si leggono "A non è sottoinsieme di B" e rispettivamente "A non è sottoinsieme proprio di B".

3. — Dobbiamo ora porci il problema delle determinazione di un insieme, cioè dobbiamo domandarci quali siano le procedure che permettono di ritenere che un insieme di cui si parla sia univocamente determinato o possa considerarsi tale.

La procedura più immediata ed elementare, che permette di precisare un determinato insieme, consiste nella enunciazione e nella presentazione di un elenco degli elementi che si considerano appartenenti all'insieme stesso.

Così l'insieme dei cittadini di una determinata città viene precisato dalla anagrafe, cioè dall'elenco, custodito nel palazzo municipale, che contiene i nomi dei cittadini.

Analogamente si potrebbe dire che le parole della lingua italiana costituiscono un insieme, il quale viene ufficialmente determinato dall'elenco delle parole stesse che compare nel dizionario della Accademia della Crusca e così via.

Spesso per presentare un insieme con l'elenco dei nomi dei suoi elementi si usa mettere questi nomi in fila, racchiudendoli tra parentesi sgraffe: così per esempio l'insieme delle vocali dell'alfabeto latino viene rappresentato con il simbolo seguente:

$$(1) \quad \{ a, e, i, o, u \} .$$

Si possono tuttavia dare dei casi in cui appare chiaramente la impossibilità in linea di principio di fare un elenco completo ed esauritivo di tutti gli elementi che appartengono ad un determinato insieme. Tale per es. è il caso dell'insieme di tutti i numeri interi (chiamati anche numeri cardinali); già la matematica greca infatti conosceva la dimostrazione del fatto che è impossibile pensare che esista il massimo numero intero, cioè che si possa enumerare ogni numero intero esistente in modo che si possa pensare all'ultimo numero della enumerazione.

Abitualmente si suol dire che gli insiemi del primo tipo, cioè quelli per cui è possibile in linea di principio enumerare tutti gli elementi sono insiemi 'finiti'; mentre gli insiemi del secondo tipo sono insiemi 'infiniti'.

Noi accetteremo qui questi termini 'insieme finito' ed 'insieme infinito' come noti, in base al significato intuitivo delle parole, che vengono utilizzate nei discorsi quotidiani.

Tuttavia ricordiamo che è possibile presentare in altro modo gli stessi concetti facendo ricorso ad un altro concetto di cui diremo brevemente, perché è importante anche per altre considerazioni.

Anche questo concetto sarà per il momento considerato come primitivo; rinunceremo cioè a definirlo con riferimento ad altri, supposti come già noti e precisati: si tratta del concetto di 'corrispondenza biunivoca tra elementi di due insiemi'.

Abbiamo detto che rinunciamo qui a definirlo; tuttavia possiamo far riferimento a certe esperienze elementari concrete che aiuteranno a precisare il concetto stesso.

Si consideri per es. il caso degli spettatori paganti che sono entrati nella sala di un cinema durante una data giornata; ognuno ha dovuto comperare un biglietto per entrare, e ovviamente nessuno ha comperato più di un biglietto a testa; pertanto è stato staccato uno ed un solo biglietto per ogni spettatore e sussiste quindi una corrispondenza biunivoca tra biglietti venduti e spettatori che nella giornata hanno frequentato la sala.

Questo tipo di corrispondenza sta alla base della genesi del numero intero cardinale; invero, con riferimento all'esempio considerato, è chiaro che per conoscere il numero degli spettatori che sono entrati in sala durante la giornata basta determinare il numero dei biglietti venduti.

Utilizzando questa nomenclatura possiamo osservare subito che, quando si tratti di insiemi finiti, non è possibile istituire una corrispondenza biunivoca tra un insieme ed un suo sottoinsieme proprio; non intendiamo dimostrare questa proposizione, ma ci limitiamo ad osservare che, se immaginiamo di poter enumerare tutti gli elementi dell'insieme considerato, cominciando la enumerazione da quelli del sottoinsieme proprio, questi ultimi sarebbero finiti, esauriti, prima che siano esauriti quelli dell'insieme dato.

La cosa invece non è più così quando si consideri un insieme infinito; la circostanza è già stata rilevata da Galileo, il quale osservò la circostanza apparentemente paradossale della esistenza di numeri interi quadrati (cioè che risultano dal quadrato di un altro intero, come 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 ecc.) i quali vanno via via 'rarefacendosi' nella successione degli interi e quindi potrebbero, a prima vista essere considerati come 'meno numerosi' degli interi; e che invece l'insieme dei numeri quadrati può essere messo in corrispondenza biunivoca con quello degli interi e pertanto i quadrati potrebbero a ragione essere considerati come 'altrettanto numerosi' degli interi.

La conclusione che Galileo trae da questo apparente paradosso è che, quando si tratta di insiemi infiniti, le espressioni 'tutto' e 'parte' acquistano dei significati particolari, diversi da quelli che hanno nel linguaggio comune che tratta abitualmente soltanto di insiemi finiti; e che quindi

le regole per costruire delle proposizioni valide con questi termini debbono essere rivedute oppure opportunamente modificate quando si tratti di insiemi infiniti; tale per es. la regola "il tutto è maggiore delle parte".

Alla luce di queste considerazioni si potrebbe per esempio trarre partito da questa circostanza per definire gli insiemi infiniti come quelli che possono essere posti in corrispondenza biunivoca con una loro parte o sottoinsieme proprio; mentre gli insiemi finiti potrebbero essere definiti in modo negativo dalla impossibilità di eseguire una operazione cosiffatta.

Orbene, è chiaro che non è possibile determinare un insieme infinito con la operazione semplice della enumerazione dei suoi elementi; occorre quindi fare appello ad operazioni logiche di cui diremo in seguito; ci limitiamo a ricordare qui ciò che abbiamo detto, cioè che un insieme di questo tipo è quello dei numeri interi naturali, che costituisce il più importante esempio di insieme infinito, di cui l'uomo si avvale nelle operazioni logiche e scientifiche che riguardano un grandissimo numero di circostanze tanto della vita quotidiana che nella scienza.

Strettamente collegato con il problema della definizione e determinazione di un insieme è il problema della determinazione di un sottoinsieme di un insieme dato. A questo proposito ci limiteremo qui ad osservare che un sottoinsieme A di un insieme dato B si può ottenere ovviamente imponendo agli elementi di B una condizione logica. Per esempio se consideriamo l'insieme B dei numeri interi, imponendo agli elementi di questo insieme la condizione di dare resto zero nella divisione per 2, si ottiene un sottoinsieme che è quello dei numeri pari.

Un sottoinsieme di questo tipo viene abitualmente indicato con simboli che fanno riferimento alla condizione logica che è stata imposta agli elementi dell'insieme B .

Per esempio, supponiamo che l'insieme B considerato sia quello dei numeri interi, e supponiamo che la condizione logica

" x è un numero che, diviso per due, dà come resto lo zero"

sia espresso convenzionalmente con il simbolo

$$D(x) \quad .$$

Pertanto $D(x)$ è una proposizione incompleta, che può diventare una proposizione completa, e quindi vera oppure falsa, quando al posto di x si ponga il simbolo che rappresenta un numero determinato. Così $D(x)$

è vera se al posto di x si pone 6, è falsa se la posto di x si pone 11.

Con questo simbolismo l'insieme A dei numeri pari viene rappresentato con il simbolo seguente

$$(2) \quad A = \{ x / x \in B , D(x) \}$$

che viene letto nel modo seguente: "A è l'insieme degli oggetti x che sono numeri interi ($x \in B$) e sono tali che la condizione $D(x)$ è soddisfatta".

In questo ordine di idee è chiaramente possibile che le condizioni imposte agli elementi dell'insieme B non siano soddisfatte di fatto da alcuno degli elementi dell'insieme stesso, oppure non possano essere soddisfatte da alcuno degli elementi perché sono contraddittorie.

Per esempio, supponiamo che B sia l'insieme delle parole della lingua italiana e che la condizione sia esposta dalla seguente frase: "x è una parola della lingua italiana che viene rappresentata graficamente da una successione di lettere le cui ultime lettere sono: ywzth"; non vi è nessuna parola della lingua italiana che soddisfa a queste condizioni; esprimeremo la stessa cosa dicendo che "l'insieme delle parole italiane che soddisfano alla condizione formulata è vuoto".

Analoghi risultati si otterrebbero imponendo delle condizioni contraddittorie, cioè tali che non possano essere soddisfatte neppure in linea di principio, da alcun elemento dell'insieme B .

Possiamo così introdurre convenzionalmente un insieme particolare, precisamente l'insieme che abbiamo chiamato "vuoto" perché è privo di elementi, e che viene convenzionalmente indicato con il simbolo

$$(3) \quad \emptyset .$$

La introduzione di questo insieme ha qualche cosa di analogo alla introduzione del numero "zero" che viene abitualmente fatta nella aritmetica, anche elementare.

Da quanto precede, si ottiene che l'insieme vuoto può essere considerato come sottoinsieme di un insieme qualsivoglia A . Si può quindi scrivere, quale che sia l'insieme A ,

$$(4) \quad \emptyset \subseteq A .$$

4. — Considerati due insiemi, che indicheremo con le lettere A e B , possiamo prendere in considerazione l'insieme che è costituito dagli elementi comuni ai due, cioè l'insieme i cui elementi sono quelli che appartengono tanto ad A che B .

Per es. sia A l'insieme dei milanesi, e B l'insieme degli esseri umani biondi, possiamo considerare l'insieme costituito dagli elementi comuni ai due, insieme che è ovviamente costituito dai milanesi dalla capigliatura bionda. Tale insieme viene indicato col simbolo

$$(1) \quad A \cap B$$

da leggersi ' A intersezione B '.

Vi è luogo quindi a considerare una operazione logica, che verrà chiamata "intersezione" e simboleggiata come si è visto sopra, scrivendo il simbolo sincategorematico " \cap " tra i simboli che rappresentano i due insiemi.

Tale operazione dà ovviamente lo stesso risultato quando si cambi l'ordine nel quale i due insiemi sono considerati; perché, nell'esempio riportato sopra, l'insieme dei milanesi che sono anche biondi coincide ovviamente, cioè ha gli stessi elementi, dell'insieme degli esseri umani biondi che sono anche milanesi.

Questa proprietà della operazione di intersezione di due insiemi viene quindi espressa dicendo che essa è commutativa e scrivendo

$$(2) \quad A \cap B = B \cap A .$$

Può avvenire che non esistano elementi comuni ai due insiemi considerati; si suol esprimere questo fatto dicendo che "l'insieme intersezione dei due è l'insieme vuoto" e scrivendo

$$(3) \quad A \cap B = \emptyset .$$

D'altra parte è chiaro che, considerato un insieme A qualunque, si ha

$$(4) \quad A \cap \emptyset = \emptyset .$$

5. — Una seconda operazione tra due insiemi viene chiamata 'riunione' ed indicata con il simbolo sincategorematico " \cup ". L'insieme che si ottiene con questa operazione viene indicato con la formula

$$(1) \quad A \cup B$$

da leggersi “ A unione B ”, ed è l’insieme costituito dagli elementi che appartengono ad uno almeno dei due, senza escludere che alcuni elementi possano appartenere ad entrambi.

Così se l’insieme A è l’insieme dei milanesi, e l’insieme B è quello dei cittadini italiani che hanno per cognome ‘Brambilla’, l’insieme $A \cup B$ è costituito dai cittadini italiani che sono milanesi oppure si chiamano ‘Brambilla’; è ovvio che possono esistere degli esseri umani che soddisfanno ad entrambe le condizioni, cioè dei milanesi che hanno per di più anche il cognome Brambilla.

Anche per l’operazione di unione di due insiemi si accetta come valida la proprietà commutativa; si avrà quindi

$$(2) \quad A \cup B = B \cup A .$$

Infine è chiaro che, quale che sia l’insieme A , si ha:

$$(3) \quad A \cup \emptyset = A .$$

6. — Si osservi ora che ognuna di queste operazioni può essere applicata a più di due insiemi. Così per es. l’operazione di intersezione può essere applicata a tre insiemi: A , B , C . Per es. si possono considerare i milanesi, di capigliatura bionda e di sesso maschile.

Per indicare un insieme cosiffatto, coi come per altre operazioni sugli insiemi, adotteremo qui l’uso delle parentesi, come si fa nelle formule dell’algebra elementare ed in generale nella matematica; precisamente le convenzioni che adotteremo ci porteranno a considerare le espressioni che si trovano tra una coppia di parentesi, la prima aperta e la seconda chiusa, come un tutto unico; esprimendo la stessa cosa in altri termini, e considerandola sotto l’aspetto che le si dà abitualmente in algebra, potremmo dire che se tra due parentesi, la prima aperta e la seconda chiusa, è indicata una operazione tra insiemi, questa si intende eseguita *prima* di quelle operazioni che eventualmente fossero indicate fuori della coppia di parentesi.

Con queste convenzioni, indicando con A l’insieme dei cittadini milanesi, con B l’insieme degli essere umani biondi, con C l’insieme degli esseri umani di sesso maschile, l’insieme dei milanesi biondi di sesso maschile viene indicato con il simbolo

$$(1) \quad (A \cap B) \cap C ;$$

è immediato verificare che questo insieme coincide con quello che si otterrebbe se si considerassero i milanesi che sono biondi e di sesso maschile, cioè se si considerasse l'insieme

$$(2) \quad A \cap (B \cap C) .$$

Si avrà quindi in generale:

$$(3) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) .$$

La proprietà espressa dalla formula precedente viene chiamata 'proprietà associativa' della operazione di intersezione tra insiemi. Dalla formula scritta si trae che è possibile scrivere semplicemente

$$(4) \quad A \cap B \cap C$$

per indicare uno qualsiasi dei due membri della uguaglianza (3), senza bisogno di precisare quale delle due operazioni di intersezione viene eseguita per prima.

Considerazioni analoghe valgono anche per l'operazione di unione di tre insiemi. Si ha quindi anche per questa operazione la proprietà associativa, espressa dalla

$$(5) \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

che ci permette di scrivere anche in questo caso semplicemente

$$(6) \quad A \cup B \cup C$$

per indicare uno qualsiasi dei due membri della uguaglianza sopra scritta.

7. — Le relazioni e le operazioni tra insiemi che abbiamo presentato ammettono una rappresentazione grafica che è spesso adoperata per rendere più chiari i discorsi.

Tal rappresentazione può essere utile, se impiegata con certe precauzioni che rendano impossibili gli equivoci. Le figure convenzionali che

vengono utilizzate per questa rappresentazione vengono chiamate 'diagrammi di Eulero' dal nome del celebre matematico Leonhard Euler (il cui nome venne latinizzato nella forma "Eulerus" e viene scritto in italiano nella forma "Eulero") che le impiegò per esporre i rudimenti della logica, o anche 'diagrammi di Eulero - Venn', aggiungendo al nome di Eulero anche quello di S. Venn, logico che riscoperse queste raffigurazioni convenzionali e le diffuse, indipendentemente da quello che aveva fatto Eulero.

Prima di presentare queste figure convenzionali, ricordiamo che in questo uso si rende evidente che i vari concetti vengono considerati soltanto con riferimento alla loro estensione (cfr. §4 Cap. II), il che appare chiaro dalla convenzione geometrica e grafica che sta sotto a tutta la rappresentazione.

Rappresentando convenzionalmente gli elementi di un insieme A e di un insieme B mediante i punti interni ad una figura a contorno piano curvilineo chiuso (per es. una ellissi o una circonferenza) gli elementi dell'insieme $A \cap B$ sono rappresentati dai punti appartenenti alla parte comune alla due figure, come mostra la illustrazione data nella fig. 1 allegata:

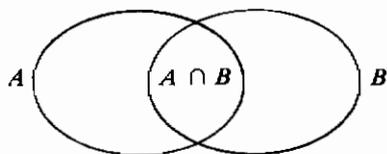


figura 1

È chiaro che il caso in cui gli insiemi A e B non abbiano elementi comuni, cioè in cui si abbia

$$A \cap B = \emptyset$$

viene illustrato con una figura analoga alla fig. 2 allegata

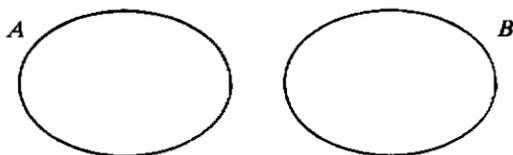


figura 2

Analogamente gli elementi dell'insieme

$$A \cup B$$

vengono rappresentati, con queste convenzioni, dai punti che sono interni ad una delle due figure che rappresentano gli insiemi A e B ; così, nel caso della fig. 3 allegata, gli elementi dell'insieme $A \cup B$ sono rappresentati dai punti interni alla figura che ha la forma approssimata di un "8" coricato il cui contorno nella figura 3 è segnato

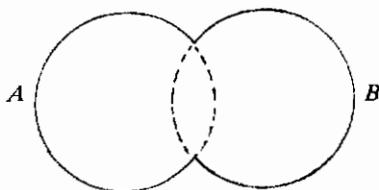


figura 3

a tratto pieno (non punteggiato).

Con queste convenzioni di rappresentazione si arriva facilmente a rappresentare altri insiemi, costruiti a partire da insiemi dati. Per es. le figure 4 e 5 illustrano i diagrammi rappresentativi degli insiemi

$$A \cap B \cap C \quad \text{e} \quad A \cup B \cup C$$

rispettivamente.

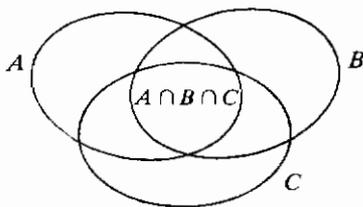


figura 4

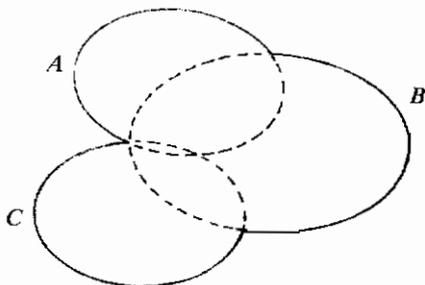


figura 5

Ricordiamo inoltre che si può avere

$$A \cap B \cap C = \emptyset$$

senza che alcuno degli insiemi

$$A \cap B, B \cap C, C \cap A$$

sia vuoto, come mostra su un esempio la figura 6 allegata

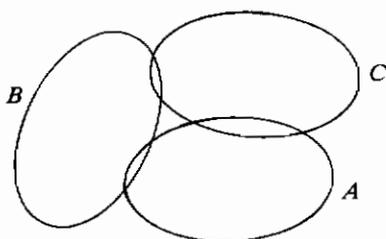


figura 6

Le figure 4 e 5 possono anche essere considerate come delle illustrazioni delle proprietà espresse dalle formule seguenti:

$$\begin{cases} (1) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ (2) & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{cases}$$

Si vuol dire che queste formule esprimono la proprietà “distributiva” di ciascuna delle due operazioni (intersezione ed unione) rispetto all’altra.

È chiaro che queste illustrazioni, e le altre che utilizzeremo nel seguito, non costituiscono delle dimostrazioni rigorose delle proprietà in oggetto; così come i pochi esempi che abbiamo riportato sopra non costituiscono dimostrazione delle proprietà formali delle operazioni considerate; tuttavia non è nostro scopo dare qui una trattazione completa degli argomenti che tocchiamo; in particolare quindi ci dobbiamo limitare a dare degli esempi e delle illustrazioni delle proprietà formali delle operazioni logiche che introduciamo, perché una dimostrazione rigorosa e soddisfacente degli enunciati che diamo richiederebbe una trattazione ad un altro livello.

In questo spirito, invitiamo il lettore a verificare con in diagrammi di Eulero la validità delle seguenti formule, che vengono spesso richiamate sotto il nome di “leggi di assorbimento”:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = A \cap (A \cup C) \\ A = A \cup (A \cap B) \end{array} \right. .$$

Infine dalle definizioni date, si trae che sono valide le proprietà espresse dalle seguenti formule:

$$(5) \quad A = A \cap A \quad ; \quad A = A \cup A \quad .$$

Le proprietà espresse da queste relazioni vengono spesso chiamate “proprietà di idempotenza” delle operazioni intersezione ed unione.

8. — Consideriamo ora un insieme che riteniamo in qualche modo dato e conosciuto: per es. l'insieme di tutti gli esseri umani viventi oggi sulla Terra, oppure l'insieme di tutti i numeri interi e così via.

Chiameremo questo insieme “Universo” o anche l'universo del discorso, ed ad esso ci riferiremo tacitamente nel seguito; ovviamente dagli esempi considerati si capisce che questo ‘universo’ non è fissato per sempre e per tutti, ma che può essere cambiato di volta in volta a seconda della trattazione che si intende fare, ma tuttavia deve essere inteso sempre fissato durante tutta la trattazione.

Tutti gli insiemi che prenderemo in considerazione saranno quindi dei sottoinsiemi dell'insieme ‘universo’ considerato e fissato, che indicheremo con U .

Consideriamo ora un insieme A il quale, a seguito della osservazione ora fatta, è un sottoinsieme di U . Diremo ‘insieme complementare di A rispetto all'universo U ’ l'insieme di tutti gli elementi di U che non appartengono ad A ; tale insieme verrà indicato col simbolo

$$\overline{A} \quad .$$

L'insieme “ \overline{A} ” si può quindi pensare ottenuto da A mediante una operazione logica che può essere chiamata ‘complementazione’ o anche, impropriamente, ‘negazione’.

Sia per esempio il nostro universo U l'insieme di tutti i numeri interi, e sia A l'insieme dei numeri pari; allora l'insieme complementare di A rispetto all'universo U è l'insieme di tutti i numeri interi che non sono pari, cioè l'insieme di tutti i numeri dispari.

Anche per rappresentare graficamente l'operazione di complementazione e le sue proprietà si possono adottare delle convenzioni analoghe a quelle che abbiamo esposto nel § precedente. Per esempio, se rappresentiamo l'universo U con i punti interni alla figura rettangolare che si vede nelle fig. 7 allegata, e l'insieme A con i punti della figura ellittica contenuta nel rettangolo, allora l'insieme \bar{A} è rappresentato da tutti i punti del rettangolo che sono *fuori* dell'ellisse.

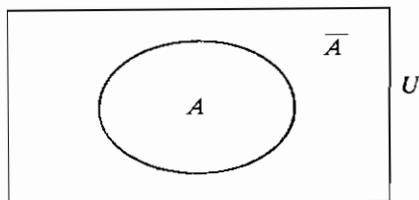


figura 7

Per l'operazione di complementazione vale la ovvia legge

$$(1) \quad \overline{(\bar{A})} = A$$

che viene spesso richiamata "legge della doppia negazione"; valgono inoltre le leggi seguenti

$$(3) \quad \begin{cases} \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{cases}$$

che vengono chiamate "leggi di De Morgan" dal nome del logico inglese che le enunciò in forma analoga a questa. La figura 8 allegata illustra queste leggi con le convenzioni che abbiamo adottato.

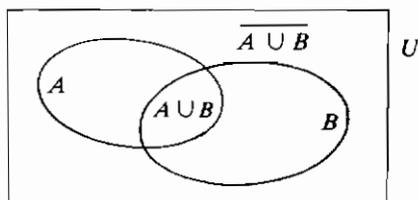


figura 8

Convenzionalmente estenderemo il significato della operazione di complementazione agli insiemi “vuoto” ed “universo” con le formule

$$(3) \quad \overline{U} = \emptyset \quad \overline{\emptyset} = U .$$

Osserviamo che per questi due insiemi, in relazione ad un insieme qualunque A , valgono le proprietà:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \cup U = U \\ A \cap U = A \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A \cup \emptyset = A \\ A \cap \emptyset = \emptyset . \end{array} \right.$$

Sono infine valide le relazioni

$$(5) \quad A \cup \overline{A} = U \quad ; \quad A \cap \overline{A} = \emptyset .$$

9. — Nel §3 abbiamo già avuto occasione di fare cenno del concetto di “corrispondenza biunivoca” tra gli elementi di due insiemi; abbiamo anche accettato tale concetto come primitivo, rinunciando cioè a definirlo, e facendo appello alla intuizione ed alla esperienza immediata.

Abbiamo anche aggiunto che, nel caso di insiemi finiti, il concetto di corrispondenza biunivoca può essere posto a fondamento del concetto di “numero cardinale”; inverso se due insiemi finiti sono tra loro in corrispondenza biunivoca, essi hanno lo stesso numero di elementi, come si trae facilmente dalla esperienza della operazione elementare del ‘contare’ gli oggetti che sono elementi di un insieme finito.

In più, sempre con riferimento alla esperienza elementare, possiamo dire che alla operazione di ‘unione’ (come sopra spiegata) di due insiemi finiti, che *non* abbiano elementi in comune, corrisponde una operazione sui concetti, che viene abitualmente chiamata ‘somma’ dei numeri, che — a questi fini — rappresentano gli insiemi considerati.

Se si lascia cadere la clausola che i due insiemi non abbiano elementi comuni, la corrispondenza tra operazioni logiche sugli insiemi ed operazioni aritmetiche sui numeri dei loro elementi ubbidisce a leggi più generali che vale la pena di considerare almeno di passaggio, per i loro collegamenti con i problemi della statistica e del calcolo delle probabilità.

Sia dunque A un insieme finito. Indichiamo con il simbolo

$$(1) \quad \text{Num}(A)$$

da leggersi “numero degli elementi dell’insieme A ”, (o anche, brevemente “numero degli A ”) il numero intero cardinale degli elementi di A .

In particolare porremo

$$(2) \quad \text{Num}(\emptyset) = 0$$

cioè faremo corrispondere il numero zero al numero degli elementi dell’insieme vuoto.

Siano dati ora due insiemi finiti A e B e siano corrispondentemente $\text{Num}(A)$ e $\text{Num}(B)$ i numeri interi cardinali che danno i numeri dei loro elementi.

Consideriamo ora l’insieme $A \cup B$. Si ha

$$(3) \quad \text{Num} (A \cup B) = \text{Num}(A) + \text{Num}(B) - \text{Num} (A \cap B) .$$

La dimostrazione di questa formula si può conseguire in modo intuitivo, osservando che, se gli insiemi A e B considerati hanno degli elementi comuni, il computo degli elementi dell’insieme unione eseguito semplicemente contando di seguito gli elementi di A e quelli di B porterebbe a contare due volte gli elementi dell’insieme intersezione.

La validità del ragionamento è d’altronde confermata da una facile ispezione delle figure 1 e 3. Un ragionamento analogo, confermato dalla ispezione delle figure 4 e 5, porta alla formula seguente, che riguarda un problema analogo al precedente e coinvolge tre insiemi:

$$(4) \quad \begin{aligned} \text{Num} (A \cup B \cup C) &= \text{Num}(A) + \text{Num}(B) + \text{Num}(C) - \\ &- \text{Num} (A \cap B) - \text{Num} (B \cap C) - \text{Num} (A \cap C) + \\ &\text{Num} (A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Si può costruire una formula generale, che coinvolge un numero n qualunque di insiemi, formula che lasciamo al lettore volenteroso.

Ricordiamo che le considerazioni qui svolte hanno collegamenti con questioni di statistica e di calcolo delle probabilità. Non possiamo qui approfondire l’argomento e ci limitiamo a presentare un esempio di applicazione, dato da un problema elementare, la cui apparente giocosità non deve tuttavia trarre in inganno.

Problema:

31 ragazzi partecipano ad una gita, a bordo di un pullmann. Ad una fermata tutti i ragazzi scendono per comperare gelati, o caramelle o cioccolattini. Da una indagine fatta si ha che

23 ragazzi hanno comperato gelati

17 hanno comperato cioccolattini

11 hanno comperato caramelle

7 hanno comperato cioccolattini e caramelle

5 hanno comperato caramelle e gelati

15 hanno comperato cioccolattini e gelati.

Si domanda quanti ragazzi hanno comperato cioccolattini, caramelle e gelati.

Per rispondere alla domanda, indichiamo con

A l'insieme dei gitanti che hanno acquistato caramelle;

B l'insieme degli acquirenti di cioccolattini

C l'insieme degli acquirenti di gelati.

Dai dati del problema si possono trarre le seguenti relazioni:

$$\text{Num } (A) = 11$$

$$\text{Num } (B) = 17$$

$$\text{Num } (C) = 23$$

$$\text{Num } (A \cap B) = 7$$

$$\text{Num } (A \cap C) = 5$$

$$\text{Num } (B \cap C) = 15$$

Ricordando che è, per ipotesi:

$$\text{Num } (A \cup B \cup C) = 31$$

dalla formula (4) si ha, sostituendo i valori:

$$\text{Num } (A \cap B \cap C) = 7 \quad .$$

10. — Utilizzeremo il simbolismo che abbiamo introdotto, e le illustrazioni che abbiamo impiegato, per esprimere ed illustrare i procedimenti della logica che abbiamo studiato nel Cap. II.

In questo § ci occuperemo delle proposizioni del quadrato fondamentale di cui abbiamo detto nel § 6 del Cap. II.

i) — Proposizione A, universale affermativa:

Tutti gli M sono P .

La illustrazione con i diagrammi di Eulero può essere data con la figura 9

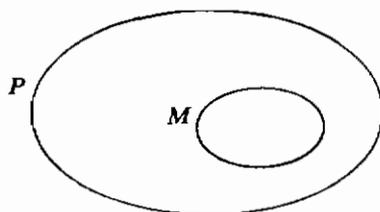


figura 9

La relazione tra gli insiemi M e P può essere espressa, con il simbolismo che abbiamo introdotto, con le formule seguenti:

- (1) $M \cap P = M$
- (2) $M \cup P = P$
- (3) $M \cap \bar{P} = \emptyset$
- (4) $\bar{M} \cup \bar{P} = \bar{M}$
- (5) $\bar{M} \cap \bar{P} = \bar{P}$.

Queste espressioni sono tutte tra loro equivalenti, nel senso che da ognuna di queste formule si possono dimostrare le altre, con i procedimenti abituali dell'algebra. Infatti: dalla (1) si ottiene la (2) operando su entrambi i membri con $\cup P$ a destra e applicando le leggi di assorbimento (3), (4) del §7.

Analogamente, operando su entrambi i membri della (2) con $\cap M$ a destra ed applicando le leggi di assorbimento si ottiene la (1).

Inoltre dalla (1) si ottiene la (4) e dalla (2) si ottiene la (5) con le leggi di De Morgan (cfr. (2) del §8); e viceversa, tenendo conto della legge della doppia negazione, espressa dalla (1) del § 8, dalle (4) e (5) si ottengono la (1) e la (2).

Inoltre, operando su entrambi i membri della (4) con $M \cap$ a sinistra, e tenendo conto delle formule dei §§7,8 si ottiene la (3).

Analogamente, operando su entrambi i membri della (3) a sinistra con $P \cup$ e sempre tenendo delle formule dei §§ 7, 8 si ottiene la (2). L'enunciato è quindi dimostrato.

ii) — Proposizione *E*, universale negativa: nessun M è un P .

La illustrazione con i diagrammi di Eulero può essere data dalla figura 10

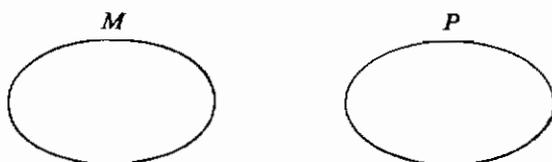


figura10

La relazione tra i due insiemi M e P può essere espressa con il simbolismo che abbiamo introdotto con le formule seguenti:

$$(6) \quad M \cap P = \emptyset$$

$$(7) \quad M \cap \overline{P} = M$$

$$(8) \quad M \cup \overline{P} = \overline{P}$$

$$(9) \quad \overline{M} \cup P = \overline{M}$$

$$(10) \quad \overline{M} \cap P = P$$

$$(11) \quad \overline{M} \cup \overline{P} = U \quad .$$

Tutte queste espressioni sono tra loro equivalenti, cioè da una di esse si può trarre una qualsivoglia delle altre con i procedimenti abituali dell'algebra. I procedimenti sono analoghi a quelli che abbiamo seguito nel caso precedente e pertanto lasciamo gli sviluppi al lettore, per esercizio.

Ci limitiamo ad osservare che la legge di conversione semplice (§8 Cap. II) viene qui espressa dalla proprietà comutativa della operazione di intersezione tra due insiemi (cfr. §4).

iii) — Proposizione *I*; particolare affermativa: qualche M è un P .

La illustrazione con i diagrammi di Eulero può essere data dalla figura seguente:

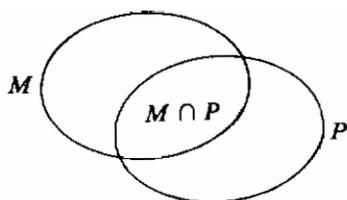


figura 11

Le relazioni tra i due insiemi M e P può essere espressa, con il simbolismo che abbiamo introdotto, con la formula:

$$(12) \quad M \cap P \neq \emptyset$$

che può essere letta: “l’intersezione tra M e P non è vuota” oppure anche, in modo equivalente: “esiste qualche M che è anche P ”.

Anche in questo caso la validità della regola di conversione semplice (§8 Cap. II) è garantita dalla proprietà commutativa della operazione di intersezione.

Si può osservare che, se vale la (12), nessuno dei due insiemi M e P può essere l’insieme vuoto \emptyset . Ciò si dimostra per assurdo, osservando che se anche uno solo dei due insiemi M e P fosse l’insieme vuoto, l’intersezione sarebbe ancora l’insieme vuoto, a norma della (4) del §8.

iii) — Proposizione O: particolare negativa: qualche M non è P .

Sempre nelle ipotesi che nessuno degli insiemi indicati sia vuoto, la relazione tra i due insiemi può essere illustrata nei casi rappresentati dalla figura seguente, nella quale è segnato con una crocetta il sottoinsieme di M costituito da elementi che non appartengono a P .

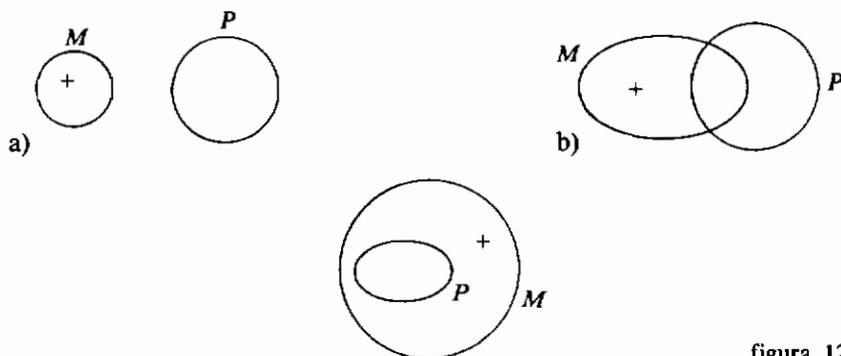


figura 12

11. — Sempre utilizzando il simbolismo che abbiamo introdotto, daremo le illustrazioni dei vari tipi di sillogismo, che abbiamo introdotto nel Cap. II. In questo § tratteremo del sillogismo della prima figura.

i) — Modo perfetto: BARBARA

Tutti gli M sono P
Tutti gli S sono M
Tutti gli S sono P .

La illustrazione con i diagrammi di Eulerò può essere data dalla figura

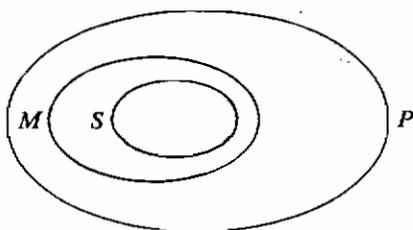


figura 13

Utilizzando il simbolismo che abbiamo introdotto, le due premesse del sillogismo possono essere scritte nel modo seguente (cfr. (1) del §10)

$$(1) \quad M \cap P = M$$

$$(2) \quad S \cap M = S$$

Da queste due, operando su entrambi i membri della (1) con $\cap S$ ed utilizzando le proprietà delle operazioni, che conosciamo, si ottiene

$$(3) \quad S \cap P = S$$

che esprime la tesi.

ii) — Modo imperfetto: BARALIPTON

Tutti gli M sono P
Tutti gli S sono M
Qualche S è un P .

La illustrazione con i diagrammi di Eulero è la stessa. Nella traduzione con i simboli, occorre ricordare la ipotesi che abbiamo già enunciato, che cioè nessuno degli insiemi di cui si parla può venir considerato coincidente con l'insieme vuoto.

Quindi alla (2) possiamo aggiungere l'ipotesi

$$(4) \quad S \neq \emptyset$$

Si ottiene quindi dalla (3)

$$(5) \quad S \cap P \neq \emptyset$$

che esprime la tesi, secondo la (12) del § precedente.

iii) — Modo perfetto: CELARENT.

Nessun M è P

Tutti gli S sono M

Nessun S è P .

La illustrazione con i diagrammi di Eulero può essere data dalla figura 14

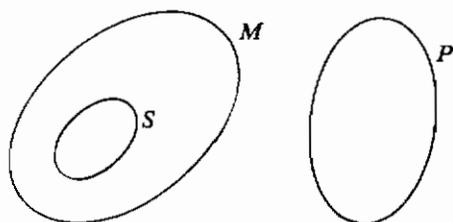


figura 14

Utilizzando il simbolismo introdotto, le premesse si possono esprimere con le formule seguenti

$$(6) \quad M \cap P = \emptyset$$

$$(7) \quad S \cap M = S$$

Operando a sinistra su entrambi i membri della (6) con $S \cap$ e tenendo conto delle proprietà delle operazioni e della ipotesi (7) si ottiene

$$(8) \quad S \cap P = \emptyset$$

che è la tesi da dimostrare.

iii) Modo imperfetto: CELANTES

Le due premesse sono uguali a quelle del sillogismo precedente; la conclusione suona

Nessun P è S

che è pure illustrata dalla fig. 14 ed espressa dalla formula (8).

v) Modo perfetto: DARII.

Tutti gli M sono P

Qualche S è M

Qualche S è P

La illustrazione con i diagrammi di Eulero si ottiene con la figura seguente:

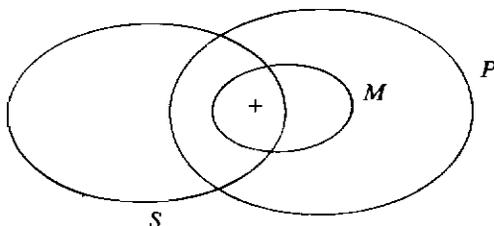


figura 15

Sempre nella ipotesi, più volte ripetuta, che nessuno degli insiemi considerati sia vuoto, nella figura è indicato con una crocetta il sottoinsieme degli S che certamente appartengono a P .

Utilizzando il simbolismo introdotto, le premesse si possono esprimere con le formule:

$$(9) \quad M \cap P = M$$

$$(10) \quad S \cap M \neq \emptyset$$

Operando su entrambi i membri della (9) a destra con $\cap S$ e tenendo conto della (10) si conclude

$$(11) \quad M \cap (P \cap S) \neq \emptyset .$$

Di qui, con un ragionamento per assurdo analogo a quello svolto nel caso iii) §10 si ha che deve essere

$$(12) \quad P \cap S \neq \emptyset$$

che è la tesi da dimostrare.

vi) - Modo imperfetto: DABITIS

Le premesse sono le stesse del sillogismo precedente; la conclusione suona:

Qualche P è S .

Anche questa conclusione è espressa dalla formula (12) ed illustrata dalla figura 15.

vii) — Modo perfetto: FERIO

Nessun M è P

Alcuni S sono M

Alcuni S non sono P .

La illustrazione con i diagrammi di Eulero può essere fatta con la figura seguente:

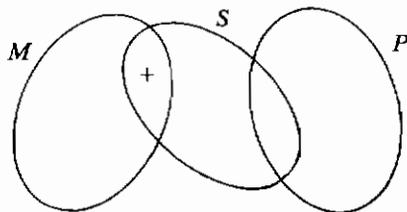


figura 16

In essa è indicato con una crocetta il sottoinsieme degli S che certamente non appartengono a P .

La traduzione con il simbolismo può essere fatta nel modo seguente:
le due promesse possono essere tradotte con le formule:

$$(13) \quad M \cap \bar{P} = M$$

$$(14) \quad S \cap M \neq \emptyset .$$

Operando su entrambi i membri della (13) con $\cap S$ a destra e tenendo conto della ipotesi (14) si ottiene

$$(15) \quad M \cap (\bar{P} \cap S) \neq \emptyset$$

Di qui, con un ragionamento per assurdo analogo a quello svolto nel caso iii) §10 si ottiene

$$(16) \quad \bar{P} \cap S \neq \emptyset$$

che è la tesi da dimostrare.

viii) Modo imperfetto: FAPESMO.

Ogni M è un S
Nessun P è un M
Qualche S non è un P .

La illustrazione con i diagrammi di Eulero si può ottenere con la figura seguente:

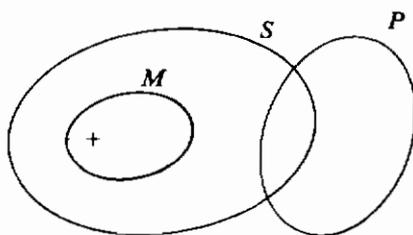


figura 17

In essa è stata indicato con una crocetta il sottoinsieme degli S che certamente non appartengono a P .

La traduzione con il simbolismo può essere fatta nel modo seguente:
le due premesse possono essere tradotte con le formule:

$$(17) \quad M \cap S = M$$

$$(18) \quad \overline{P} \cap M = M$$

Di qui, operando su entrambi i membri della (18) con $S \cap$ e tenendo conto della ipotesi tacitamente ammessa

$$(19) \quad M \neq \emptyset$$

si ottiene

$$(20) \quad \overline{P} \cap S \neq \emptyset$$

che è la tesi da dimostrare.

viii) Modo imperfetto: FRISESOMORUM

Qualche M è un S
Nessun P è un M
Qualche S non è P .

La illustrazione con i diagrammi di Eulero può essere fatta con la figura seguente:

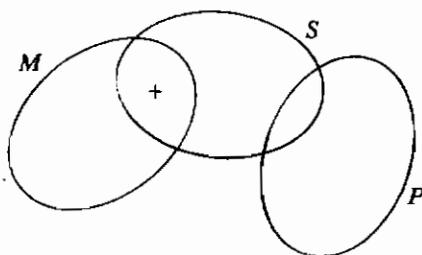


figura 18

In questa abbiamo indicato con una crocetta il sottoinsieme degli S che certamente non appartengono a P .

La traduzione con il simbolismo può essere fatta nel modo seguente: le due premesse possono essere tradotte con le formule:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \cap S \neq \emptyset \\ M \cap \bar{P} = M \end{array} \right.$$

Di qui operando su entrambi i membri della (22) a destra con $\cap S$ e tenendo conto della (21) e della ipotesi tacitamente ammessa

$$(23) \quad M \neq \emptyset$$

si ottiene

$$(24) \quad \bar{P} \cap S \neq \emptyset$$

che è la tesi da dimostrare.

12 — In questo § tratteremo dei sillogismi della II figura, con procedimenti analoghi a quelli che abbiamo adottato nel § precedente a proposito dei sillogismi della prima figura.

i) — CESARE

Nessun P è un M
 Ogni S è un M
 Nessun S è un P .

La illustrazione con i diagrammi di Eulero data nelle fig. 14 è valida anche in questo caso, e parimenti valide sono le formule che traducono il ragionamento con il simbolismo adottato.

ii) — CAMESTRES

Tutti i P sono M
 Nessun S è un M
 Nessun S è un P .

Con i diagrammi di Eulero la illustrazione può essere fatta con la figura seguente:

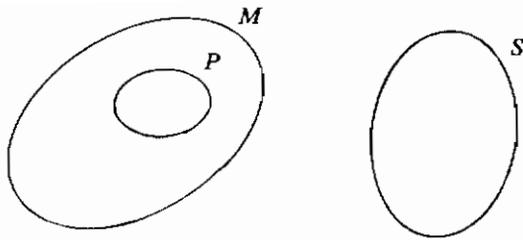


figura 19

La traduzione delle premesse con il simbolismo adottato conduce alle formule seguenti:

$$(1) \quad P \cap M = P$$

$$(2) \quad S \cap M = \emptyset$$

da cui, con il procedimento analogo a quello già visto nella trattazione del sillogismo CELARENT del § precedente, si trae anche in questo caso la conclusione

$$(3) \quad S \cap P = \emptyset .$$

iii) — FESTINO

Nessun P è un M
 Qualche S è un M
 Qualche S non è un P .

Per la illustrazione con i diagrammi di Eulero è valida la fig. 16, così come validi gli sviluppi simbolici adottati nel § precedente a proposito dello schema FERIO.

iiij) — BAROCO

Ogni P è un M
 Qualche S non è un M
 Qualche S non è un P .

La illustrazione con i diagrammi di Eulero può essere data con la seguente figura 20

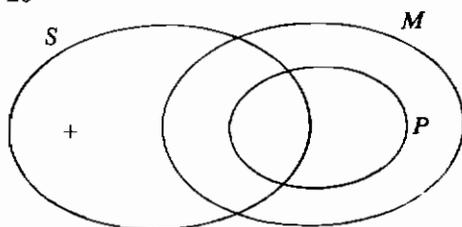


figura 20

In essa è stato segnato con una crocetta il sottoinsieme degli S che non sono degli M e quindi certamente, a maggior ragione, non sono dei P .

Utilizzando il simbolismo adottato, le due premesse si possono esprimere nel modo seguente:

$$(4) \quad P \cap M = P$$

$$(5) \quad S \cap \bar{M} \neq \emptyset .$$

Ora la (4), in forza delle leggi di De Morgan può essere scritta nella forma

$$(6) \quad \bar{P} \cup \bar{M} = \bar{P}$$

Operando su entrambi i membri di questa formula con $S \cap$, e tenendo conto del fatto che dalla premessa (5) segue

$$(7) \quad S \neq \emptyset$$

si ottiene

$$(8) \quad S \cap \bar{P} \neq \emptyset$$

che è la tesi.

13 — In questo § tratteremo dei sillogismi della terza figura, che illustreremo in modo analogo a quanto abbiamo già fatto nei §§ precedenti a proposito dei sillogismi della prima e della seconda.

i) — BOCARDO

Qualche M non è P
Tutti gli M sono S
Qualche S non è P .

La illustrazione può essere ottenuta con i diagrammi di Eulero con la figura seguente:

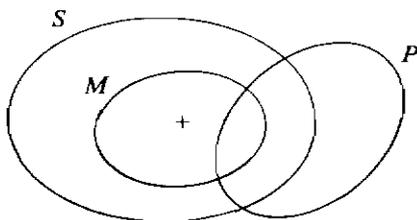


figura 21

In essa è stato segnato con una crocetta il sottoinsieme degli S che certamente non appartengono a P .

In simboli il ragionamento può essere tradotto in formule nel modo seguente:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \cap \bar{P} \neq \emptyset \\ M \cap S = M \end{array} \right.$$

Operando su entrambi i membri della (2) con $\bar{P} \cap$, e tenendo conto del fatto che dalla prima premessa si trae

$$(3) \quad M \neq \emptyset$$

si ottiene

$$(4) \quad S \cap \bar{P} \neq \emptyset$$

che è la tesi.

ii) — DARAPTI

Tutti gli M sono P

Tutti gli M sono S
Qualche S è P .

La illustrazione con i diagrammi di Eulero può essere data con la figura 22

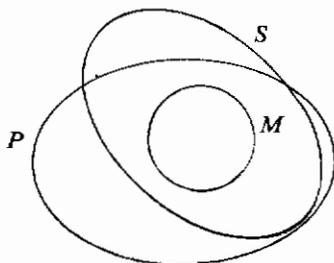


figura 22

Nella ipotesi, tacitamente ammessa, che sia

$$(5) \quad M \neq \emptyset$$

le due premesse possono essere tradotte nel modo seguente:

$$(6) \quad M \cap P = M$$

$$(7) \quad M \cap S = P$$

Operando su entrambi i membri della (6) con $S \cap$ si ottiene, in forza della ipotesi (5)

$$(8) \quad S \cap P \neq \emptyset$$

che è la tesi.

iii) — FELAPTON

Nessun M è un P
Tutti gli M sono S
Qualche S non è P .

La illustrazione con i diagrammi di Eulero può essere data con la seguente figura 23

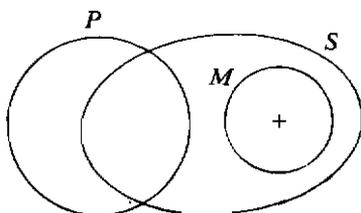


figura 23

In essa è stata segnato con una crocetta il sottoinsieme degli S che certamente non sono dei P .

La traduzione con formule delle premesse può essere fatta nel modo seguente:

$$(9) \quad M \cap \overline{P} = M$$

$$(10) \quad M \cap S = M$$

Operando su entrambi i membri della (9) con $\cap S$ e tenendo conto della ipotesi tacitamente ammessa

$$(11) \quad M \neq \emptyset$$

si ottiene

$$(12) \quad S \cap \overline{P} \neq \emptyset$$

che è la tesi.

iiij) — DISAMIS

Qualche M è un P
 Tutti gli M sono degli S
 Qualche S è un P .

La illustrazione con i diagrammi di Eulero può essere data con la figura 24

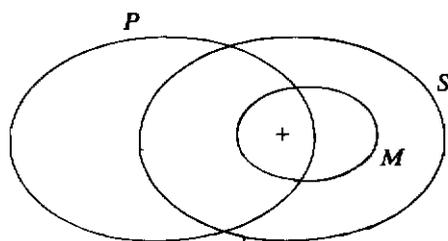


figura 24

In essa è stato segnato con una crocetta il sottoinsieme degli S che appartengono certamente a P .

La traduzione con i simboli può essere data nel modo seguente: le due premesse possono essere tradotte con le formule:

$$(13) \quad M \cap P \neq \emptyset$$

$$(14) \quad M \cap S = M$$

Tenendo conto che della prima premessa si trae

$$(15) \quad M \neq \emptyset$$

ed operando su entrambi i membri della (14) con $P \cap$ si ottiene

$$(16) \quad S \cap P \neq \emptyset$$

che è la tesi.

v) — DATISI

Tutti gli M sono P

Qualche M è S

Qualche S è P

La illustrazione con i diagrammi di Eulero può essere fatta con la figura 25

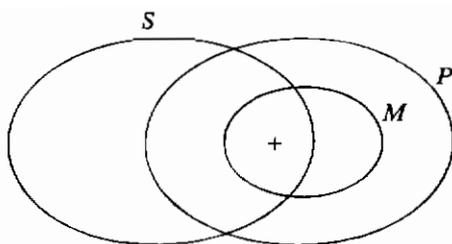


figura 25

In essa è stato segnato con una crocetta il sottoinsieme degli S che certamente appartengono a P .

La traduzione con i simboli conduce alle formule seguenti:

$$(17) \quad M \cap P = M$$

$$(18) \quad S \cap M \neq \emptyset$$

Dalla seconda si ha

$$(19) \quad M \neq \emptyset .$$

Operando su entrambi i membri della (17) con $S \cap$ e tenendo conto della (18) e della (19) si ottiene

$$(20) \quad S \cap P \neq \emptyset$$

che è la tesi.

vi) — FERISON

Nessun M è un P
 Qualche M è un S
 Qualche S non è P

La illustrazione con i diagrammi di Eulero può essere data con la seguente figura 26

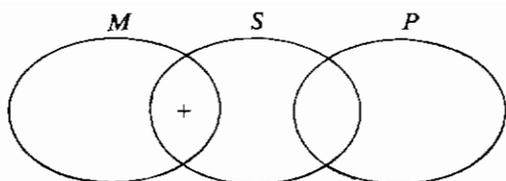


figura 26

In essa è stato segnato con una crocetta il sottoinsieme degli S che certamente *non* appartengono a P .

La traduzione delle premesse con i simboli adottati conduce alle formule seguenti:

$$(21) \quad M \cap \overline{P} = M$$

$$(22) \quad S \cap M \neq \emptyset .$$

Dalla (22) si trae la

$$(23) \quad M \neq \emptyset .$$

Operando ora su entrambi i membri della (21) con $S \cap$ e tenendo conto della (22) e della (23) si ottiene

$$(24) \quad S \cap \overline{P} \neq \emptyset$$

che è la tesi.

14 — Per gli insiemi che sono tutti dei sottoinsiemi di un certo insieme dato (che abbiamo convenzionalmente chiamato ‘universo’) abbiamo definito certe operazioni, di intersezione, unione e complementazione, che hanno certe proprietà. Queste sono riassunte nella tabella allegata, nella quale il simbolo “ U ” indica l’universo ed il simbolo “ \emptyset ” indica l’insieme vuoto.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{array} \right. \quad (1) \text{ Proprietà commutativa}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{array} \right. \quad (2) \text{ Proprietà associativa}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array} \right. \quad (3) \text{ Proprietà distributiva}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{array} \right. \quad (4) \text{ Proprietà di idempotenza}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{array} \right. \quad (5) \text{ Proprietà di assorbimento}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \end{array} \right. \quad (6) \text{ Leggi di De Morgan}$$

$$\overline{\overline{A}} = A \quad (7) \text{ Proprietà della doppia negazione}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cap \emptyset = \emptyset \\ A \cup \emptyset = A \\ A \cup \overline{A} = U \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A \cap U = A \\ A \cup U = U \\ A \cap \overline{A} = \emptyset \end{array} \right. \quad (8) \text{ Proprietà dell'insieme vuoto e dell'insieme "universo"}.$$

In questa tabella si può osservare che le formule che sono indicate a coppie con i numeri da (1) al (6) si possono ottenere l'una dall'altra semplicemente cambiando tra loro di posto i simboli delle operazioni di intersezione e di unione.

Questa proprietà viene chiamata "dualità" e permette di costruire delle espressioni valide quando si parta da espressioni pure valide, semplicemente cambiando la forma tipografica dei simboli interessati.

Come abbiamo detto poco sopra, le formule della Tabella sono state utilizzate finora per esprimere le proprietà delle operazioni che si possono eseguire su certi insiemi; in questa luce noi abbiamo finora utilizzato queste proprietà per illustrare i sillogismi della logica classica.

Si può osservare tuttavia che tale interpretazione può non essere la sola che si dà dei simboli utilizzati. Pertanto le formule della tabella possono essere considerate in relazione a degli enti qualsivogliano. Esse esprimono certe proprietà formali delle operazioni, che fondano una teoria astratta delle manipolazioni su formule, le quali possono avere diversi significati concreti in relazione a diversi contesti ed a diverse interpretazioni particolari.

Lo studio delle proprietà formali delle operazioni su simboli non precisati è di competenza della branca della matematica che viene chiamata "Algebra". Quando i simboli obbediscono alle leggi che si fondano sulle relazioni elementari della tabella (1 ... 8), tale branca viene chiamata "Algebra di Boole" dal nome del logico inglese che per primo utilizzò queste idee in relazione alla logica e formulò per primo le proprietà formali delle operazioni, che egli (insieme con altri in seguito) chiamò rispettivamente prodotto e somma logica.

Nel § 6 abbiamo detto che avremmo operato sui simboli degli insiemi e delle operazioni su di essi con le ordinarie regole che valgono per le trasformazioni dei simboli dell'algebra; in seguito, le operazioni che abbiamo eseguito sono state in qualche modo giustificate facendo ricorso al significato dei simboli o mediante le illustrazioni date dai diagrammi di Eulero. Vale la pena di osservare qui che le regole per trasformare una espressione dell'algebra di Boole in un'altra possono essere ridotte alle due seguenti:

- a) è lecita la sostituzione di una lettera in una delle formule precedenti con altra lettera in ogni occorrenza della prima, oppure con altre espressioni composte;
- b) è lecito sostituire una all'altra due espressioni che compaiono l'una alla destra e l'altra alla sinistra del segno sincategorematico "=",

Così per esempio al posto della lettera C nella prima delle (3) possiamo sostituire la espressione $D \cap E$; otterremo così la espressione

$$A \cap [B \cup (E \cap D)] = (A \cap B) \cup [A \cap (D \cap E)] .$$

In questo ordine di idee si presenta qui il problema di decidere se due espressioni dell'algebra di Boole si possono ottenere l'una dall'altra mediante le operazioni indicate o — come diremo convenzionalmente — se due espressioni dell'algebra di Boole sono "equivalenti.

A tal fine si può seguire la procedura che conduce a scrivere una espressione cosiffatta in una forma che diremo "canonica". Infatti possiamo osservare che le formule (6) permettono di portare il simbolo di complementazione all'interno di una parentesi qualsivoglia e le formule (3) permettono di portare all'interno di una parentesi i segni di intersezione lasciando all'esterno quelli della operazione unione; o viceversa.

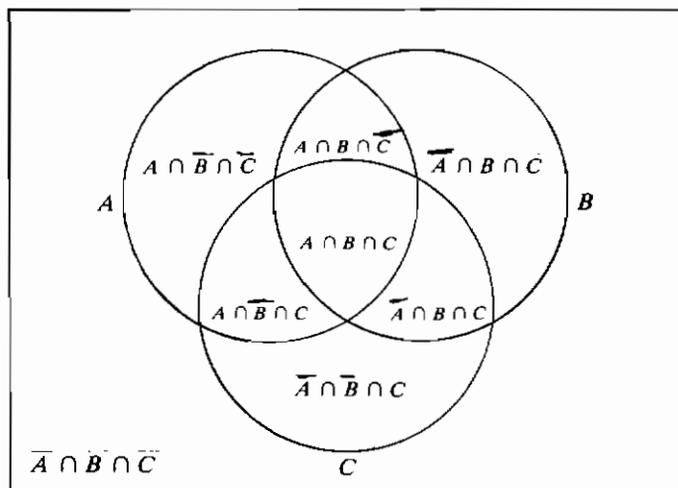
In tal modo, ripetendo i passaggi un numero opportuno di volte, si può ricondurre ogni espressione dall'algebra di Boole ad una unica espressione, formata dalla unione di certe espressioni tra parentesi, ognuna delle quali consiste nella intersezione di simboli che rappresentano elementi dell'algebra, ognuno dei quali può essere sopra-lineato oppure no.

Inoltre possiamo osservare che se nella espressione compaiono n simboli categorematici A, B, C, \dots il numero delle parentesi diverse di questo tipo è 2^n . Per esempio, se i simboli categorematici sono tre: A, B, C le parentesi possibili sono 8 e precisamente le seguenti:

$$(A \cap B \cap C); (A \cap B \cap \bar{C}); (A \cap \bar{B} \cap C); (A \cap \bar{B} \cap \bar{C});$$

$$(\bar{A} \cap B \cap C); (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}); (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C); (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}).$$

Ricorrendo alla interpretazione data dal significato insiemistico, e alla illustrazione con i diagrammi di Eulero, si ottengono gli insiemi rappresentati convenzionalmente nella figura acclusa



È chiaro che ogni insieme che possa essere determinato dalle linee segnate in figura può essere espresso come unione di un certo numero di insiemi scelti tra gli 8 segnati.

Segue da quanto abbiamo detto che le espressioni dell'algebra di Boole che contengono n simboli categorematici possono essere ricondotte a

$$2^{2^n} - 1$$

forme canoniche tra loro diverse.

Abbiamo già introdotto, nel § 3, il concetto di insieme vuoto, ed abbiamo osservato che esso può essere considerato come un sottoinsieme di un insieme qualsiasi.

Per gli sviluppi che seguiranno ci interessa qui introdurre anche l'insieme che possiede un unico elemento. Indicato con x tale elemento, l'insieme che ha come unico elemento x viene indicato con il simbolo

$$\{ x \}$$

analogamente a quanto è stato fatto nel § 3. Un insieme che ha un unico elemento viene chiamato talvolta "singoletto" od anche con il termine inglese di "singleton".

Considerato un insieme qualsiasi X si può considerare un insieme che ha come elementi tutti i possibili sottoinsiemi di X ; tale insieme viene indicato con il simbolo

$$\mathcal{P}(X)$$

e viene spesso chiamato "l'insieme delle parti" di X .

Per esempio, supponendo che si abbia

$$X = \{ a, b \}$$

l'insieme $\mathcal{P}(X)$ ha come elementi

$$\emptyset, \{ a \}, \{ b \}, X .$$

Appare immediata la constatazione che quando X è un insieme finito, il numero degli elementi di $\mathcal{P}(X)$ è maggiore del numero degli elementi di X , escluso solo il caso in cui l'insieme X è l'insieme vuoto \emptyset .

Questa proprietà è di carattere generale e viene espressa da un fondamentale teorema di G. Cantor, valido per ogni insieme X , finito oppure no. Tale teorema può essere enunciato nel modo seguente:

Un insieme qualunque X , diverso dall'insieme vuoto, non può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathcal{P}(X)$.

Non diamo qui la dimostrazione di questo teorema, e ci limitiamo ad osservare che, quando l'insieme X sia finito, indicato con n il numero (diverso da zero) dei suoi elementi, il numero degli elementi di $\mathcal{P}(X)$ è 2^n . Dal che appare chiaramente la validità del teorema, almeno nel caso degli insiemi finiti, perché, se n è maggiore di zero si ha chiaramente

$$2^n > n$$

e quindi segue la validità dell'enunciato.

15 — Abbiamo visto nel § precedente che un insieme può essere considerato come elemento di un insieme: così un insieme X o un suo sottoinsieme sono elementi dell'insieme $\mathcal{P}(X)$ delle parti di X .

Ci si può porre la questione se un insieme possa essere elemento di se stesso; se cioè, indicando con X un insieme, si possa scrivere la relazione:

$$(1) \quad X \in X \quad ;$$

si possono esaminare gli esempi più immediati e si può concludere che in generale questa relazione non è soddisfatta: per esempio l'insieme di tutti gli uomini non è un uomo. Si ha pertanto che, in generale almeno, vale la relazione che si ottiene negando la validità della (1), vale cioè la

$$(2) \quad X \notin X \quad .$$

Si pone ora la questione se abbia senso considerare l'insieme di tutti gli insiemi che soddisfano alla (2); se cioè esista un insieme A tale che ogni insieme che gli appartiene come elemento soddisfi alla (2), la quale dunque viene considerata logicamente equivalente alla

$$(3) \quad X \in A \quad .$$

Orbene si verifica che il concetto dell'insieme A è contraddittorio in sé; infatti se l'insieme A esistesse, allora esso verifica la (1) oppure la (2). Ma se soddisfa alla (1) allora questa diventa, per $X = A$

$$(4) \quad A \in A \quad ,$$

cioè diventa la (3) quando al posto di X si pone A ; ma abbiamo detto che la (3) è logicamente equivalente alla (2) e dalla (2), ponendo $X = A$ si ottiene

$$(5) \quad A \notin A \quad ;$$

viceversa, se supponiamo che la (5) sia valida per l'insieme A , allora è valida anche la (3), quando si sostituisca $X = A$, che è logicamente equivalente, cioè è valida la (4) che è contraddittoria alla (5).

L'antinomia che abbiamo ora esposto è dovuta a Bertrand Russel e viene abitualmente richiamata col nome di questo logico; la soluzione di questo paradosso è stata data dallo stesso Russel osservando che esso può essere espresso quando si accetti che si possa scrivere la (1), cioè si accetti che un insieme X possa essere elemento di se stesso.

Pertanto questa conseguenza paradossale non si può ottenere se si enunciano delle regole di formazione delle espressioni logiche le quali interdichino di scrivere la formula (1) o altre dello stesso genere. Pertanto Russel introdusse dei 'tipi' per i simboli categorematici che indicano gli insiemi; ogni tipo è rappresentato da un numero intero e una formula come la (1) non può essere scritta se i due simboli che stanno a destra ed a sinistra del simbolo sincategorematico " \in " sono dello stesso tipo, ma solo se il simbolo che sta a sinistra appartiene ad un tipo che è rappresentato da un numero minore di una unità di quello che corrisponde al simbolo che sta a destra.

Non possiamo approfondire qui l'argomento e ci limitiamo quindi a presentare un altro tipo di antinomia che viene detta 'antinomia di Richard' dal nome di chi ne diede il primo esempio. Per presentare questa antinomia, prendiamo in considerazione una determinata lingua, per esempio, nel nostro caso, la lingua italiana e scriviamo con questa lingua il nome dei numeri interi successivi: uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, dieci, undici, dodici, ecc. Avendo così scelto il modo di rappresentare gli interi, possiamo ordinare i numeri a seconda del numero di lettere che sono necessarie per rappresentarli: così ci vogliono

tre lettere per rappresentare uno, due, tre, sei, quattro lettere per rappresentare otto, nove, cinque lettere per rappresentare sette e dieci, e così via. Se poi vari numeri possono essere rappresentati con parole aventi il medesimo numero di lettere, li metteremo in ordine a seconda della grandezza. Otteniamo così un ordinamento che, in linea di principio, non tralascia alcun numero intero. Scriviamo ora la frase: "Il minimo numero che non può essere rappresentato con meno di sessanta lettere".

Nell'ordinamento che abbiamo stabilito ci saranno i numeri che possono essere rappresentati con meno di sessanta lettere e quelli che non possono essere rappresentati così; questi ultimi formano un insieme infinito che ha un primo numero, ovviamente superiore ad uno. Pertanto tale numero è perfettamente definito dalla frase che abbiamo scritto, la quale tuttavia enuncia la impossibilità di determinare il numero stesso. e — per parte sua — contiene 58 lettere, cioè meno di 60.

CAPITOLO IV
IL CALCOLO DELLE PROPOSIZIONI

CAPITOLO IV

IL CALCOLO DELLE PROPOSIZIONI

1. — Dedicheremo questo capitolo alla esposizione del calcolo delle proposizioni; e tratteremo anzitutto delle proposizioni non analizzate, nelle quali cioè rinunceremo a distinguere i termini che le costituiscono, per dedicare la nostra attenzione alla sola circostanza della verità o della falsità degli enunciati.

Tuttavia, prima di presentare queste teorie, ci soffermeremo un poco ad esporre alcune convenzioni simboliche, oggi spesso utilizzate nei trattati di matematica. Non si tratta di notazioni che appartengono al calcolo delle proposizioni, ma di convenzioni molto diffuse, che permettono di risparmiare spazio e parole e quindi, da questo e da altri punti di vista, possono essere considerate come delle notazioni rudimentali di logica simbolica.

Tra queste ricordiamo anzitutto il simbolo “ \in ” che abbiamo già introdotto nel Cap. precedente, per indicare l'appartenenza di un certo elemento ad un determinato insieme; in secondo luogo ricordiamo il simbolo “ \forall ” (analogo ad un A maiuscolo rovesciato) che viene spesso utilizzato per indicare l'aggettivo “tutti”. Per esempio, con notazioni di questo tipo, indicato con N l'insieme dei numeri interi naturali, si trova scritto

$$x^2 \geq 0, \quad \forall x \in N$$

formula che si legge: il quadrato di un intero è non minore di zero, quale che sia l'intero considerato.

Si utilizzano poi di frequente delle notazioni convenzionali per indicare i rapporti tra proposizioni o tra insiemi di proposizioni, notazioni che sono utili per indicare la dipendenza logica di una o più proposizioni

da certe altre, prese come ipotesi. Così nell'uso abituale della matematica di oggi, indicate con H e T due proposizioni, si suole scrivere

$$(1) \qquad H \Rightarrow T$$

per indicare che dalla proposizione H , assunta come ipotesi e pertanto accettata come vera, si può dimostrare la proposizione T . La dimostrazione che conduce a garantire la validità della proposizione T dalla validità accettata della H viene chiamata "Teorema"; la H viene chiamata "ipotesi" del teorema e la T viene chiamata "tesi" del teorema.

Questa nomenclatura — abbiamo detto — viene abitualmente adottata in relazione a proposizioni della matematica, ma a rigore di termini non è esclusiva di questa scienza.

La formula (1) viene abitualmente letta con frasi del tipo "dalla H si deduce T ", oppure "l'ipotesi H implica la tesi T "; tuttavia vengono anche utilizzate delle espressioni come le seguenti: "la H è condizione sufficiente per la T " ed anche "la T è condizione necessaria per la H ".

Così si possono avere per esempio le proposizioni seguenti:

H : la rappresentazione di un numero intero n con le abituali convenzioni posizionali delle cifre arabo-indiane ha come ultima cifra a destra lo zero";

T : "il numero n è divisibile per 5".

In questo caso per esempio la (1) viene letta dicendo che "perché un numero sia divisibile per 5 è sufficiente che la sua rappresentazione decimale porti come ultima cifra a destra lo zero"; oppure "se la rappresentazione decimale di un numero n porta come ultima cifra a destra lo zero, allora il numero n è necessariamente divisibile per 5".

Spesso in matematica accanto alla proposizione (1) si prendono in considerazione altre proposizioni che sono collegate con la (1). La prima proposizione che prenderemo in considerazione è la

$$(2) \qquad T \Rightarrow H$$

questa proposizione viene chiamata "inversa" della (1), così come la (1) stessa viene chiamata "inversa" della (2).

Ovviamente non è sempre detto che quando una delle proposizioni vale valga anche l'altra; ciò risulta evidente dall'esempio che abbiamo

addotto poco fa, perché è chiaramente sufficiente che il fatto che la rappresentazione di un dato numero intero porti come ultima cifra a destra lo zero perché il numero stesso sia divisibile per 5; ma non è affatto necessario, perché la divisibilità per 5 si realizza anche quando l'ultima cifra a destra invece che lo zero sia il 5.

Quando valgono insieme la (1) e la (2) (il che, ripetiamo, non avviene sempre) si suol dire che la H è condizione necessaria e sufficiente perché sussista la (2) e viceversa la (2) è condizione necessaria e sufficiente perché sussista la (1). Si suole esprimere questa relazione tra queste due proposizioni scrivendo simbolicamente

$$(3) \quad H \Leftrightarrow T \quad .$$

La seconda proposizione che si prende in considerazione accanto alla (1) è la seguente:

$$(4) \quad \text{non } H \Rightarrow \text{non } T$$

cioè “dalla negazione della H consegue la negazione della T . Nelle trattazioni abituali si suole indicare con il simbolo

$$(5) \quad \neg H$$

la proposizione che si ottiene negando la H . Così per es. nell'esempio precedente, la proposizione $\neg H$ potrebbe essere enunciata nel modo seguente:

“La rappresentazione decimale del numero n ha come ultima cifra a destra una cifra diversa dallo zero.”

Con questa convenzione la (4) viene scritta nella forma seguente:

$$(6) \quad \neg H \Rightarrow \neg T$$

questa proposizione viene anche chiamata “opposta” della (1).

Appare chiaro dall'esempio esposto che dalla validità della (1) non si può dedurre la garanzia della validità della (6). Invero — con riferimento all'esempio considerato — il fatto che l'ultima cifra a destra della rappresentazione di un numero sia diversa da zero non porta come conseguenza che il numero stesso non sia divisibile per 5. Ciò infatti può avve-

nire quando l'ultima cifra a destra, pur essendo diversa da zero, è uguale a 5.

Infine si può prendere in considerazione la proposizione

$$(7) \quad \neg T \Rightarrow \neg H$$

che viene chiamata la "contronominale" della (1).

Poiché vale ovviamente la "legge della doppia negazione" che viene espressa nella forma

$$(8) \quad \neg (\neg H) \Leftrightarrow H$$

è chiaro che le due proposizioni (2) e (7) sono opposte tra loro.

Quando due proposizioni stanno tra loro nella relazione (3) e pertanto la validità di una esse è condizione necessaria e sufficiente per la validità dell'altra si suol dire che sono 'equivalenti'.

Si verifica che le due proposizioni (2) e (7), cioè una proposizione e la sua contronominale sono equivalenti; si esprime questa circostanza scrivendo

$$(9) \quad (H \Rightarrow T) \Leftrightarrow (\neg T \Rightarrow \neg H) .$$

di conseguenza in matematica spesso invece di dimostrare una proposizione si dimostra la sua contronominale.

Così per es. invece di dimostrare il teorema "Se un quadrangolo piano (in Geometria euclidea) ha le diagonali di uguale lunghezza è un rettangolo" si dimostra "Se un quadrangolo piano ha le diagonali di lunghezza diversa esso certamente non è un rettangolo"

Riassumendo quindi i modi di esprimersi abituali della Matematica (ma anche del linguaggio comune) ed il simbolismo elementare spesso adottato, si ha che le proposizioni

$$H \Rightarrow T \quad \text{e} \quad T \Rightarrow H$$

vengono chiamate 'inverse' tra loro; dalla validità dell'una non si può dedurre la validità dell'altra; ma quando ciò avviene essere vengono dette 'equivalenti' e si scrive la (3). Le proposizioni

$$H \Rightarrow T \quad \text{e} \quad \neg H \Rightarrow \neg T$$

vengono dette 'opposte' tra loro. Anche in questo caso dalla validità dell'una non si può dedurre la validità dell'altra. Tuttavia se in particolare vale la (3) vale anche la

$$(10) \quad \neg H \Rightarrow \neg T .$$

Infine le due proposizioni

$$(11) \quad H \Rightarrow T \quad \text{e} \quad \neg T \Rightarrow \neg H$$

vengono chiamate "contronominale, e per esse vale la (9)."

2. — Ciò che abbiamo esposto nel § precedente costituisce — come abbiamo detto — soltanto un abbozzo di utilizzazione dei simboli nella rappresentazione dei rapporti logici tra proposizioni; pertanto — ripetiamo — si tratta di un simbolismo che è piuttosto un insieme di abbreviazioni convenzionali che un vero e proprio sistema di deduzione.

Inizieremo ora ad esporre il calcolo delle proposizioni non analizzate, che costituisce uno dei primi capitoli della logica simbolica moderna.

Esistono in proposito vari tipi di notazioni e di convenzioni, tra i quali ricorderemo le notazioni della scuola anglossassone, che hanno avuto la loro origine nelle convenzioni del matematico italiano G. Peano e nei lavori di Whitehead e Russel; le notazioni della scuola polacca e le notazioni della scuola tedesca, che ha avuto la sua origine nei lavori del matematico D. Hilbert e della sua scuola. Noi utilizzeremo queste notazioni, ricordando che esistono anche altre convenzioni, che vengono utilizzate per esempio dagli studiosi e costruttori di circuiti elettrici, e delle macchine elettroniche per la elaborazione della informazione e per il calcolo.

Introduciamo anzitutto, come simboli categorematici, gli elementi di un alfabeto, intendendo questo termine nel modo più convenzionale e generico, cioè come designante un insieme di simboli distinguibili senza ambiguità uno dall'altro, che non hanno significato "naturale", ma ai quali viene spesso assegnato convenzionalmente un significato di volta in volta, a seconda che occorra, in una data trattazione ed in una data teoria.

Noi utilizzeremo qui come elementi dell'alfabeto le lettere dell'alfabeto latino in carattere maiuscolo; osserviamo tuttavia che tali simboli possono essere in numero grande a piacere e quindi, invece della conven-

zione da noi qui scelta (e qui sufficiente ai nostri fini) si potrebbe convenire di adottare una sola lettera per es. la A , con un indice numerico suffisso, per es.

$$A_1, A_2, A_3, \dots;$$

saremmo così in grado di costruire un numero indeterminato di simboli diversi e perfettamente riconoscibili.

Nella trattazione che seguirà, con le lettere dell'alfabeto converremo di indicare delle proposizioni non analizzate.

Con questa espressione noi intendiamo dire che, data una proposizione, rinunciamo a distinguere in essa un soggetto, una copula verbale ed un predicato, come abbiamo fatto quando abbiamo esposto la logica classica, che si avvale del linguaggio comune; ci limiteremo invece a prendere in considerazione quello che chiameremo il "valore di verità" della proposizione, cioè il fatto che essa sia vera oppure falsa.

Vengono utilizzate varie notazioni per indicare i valori di verità di una proposizione; così si trova presso alcuni autori la coppia di simboli "V" e "F" per indicare il valore di verità rispettivamente vero oppure falso; talvolta si trovano anche le lettere "T" e "F", dalle iniziali delle parole inglesi che indicano il vero oppure il falso.

Noi utilizzeremo convenzionalmente dei simboli numerici per indicare i valori di verità di una proposizione.

Tali simboli saranno i numeri 1 e 0, adottati convenzionalmente per indicare i valori di verità rispettivamente vero o falso. Converremo anche di associare ad ogni lettera maiuscola che indica una proposizione la stessa lettera, in carattere minuscolo, per indicare il valore di verità.

Così per es. se A, B, C sono delle lettere con le quali indicheremo certe proposizioni, con a, b, c rispettivamente indicheremo dei numeri che possono prendere soltanto i valori uno e zero e che indicano i valori di verità delle proposizioni corrispondenti.

Quindi scrivendo per esempio

$$a = 1$$

indicheremo che il valore di verità della proposizione A è 1, e quindi affermeremo che la proposizione stessa è vera.

Date che siano certe proposizioni, che chiameremo per il momento "semplici", ci interessa poterne costruire delle altre, che diremo "compo-

ste” con quelle; e ci interessa qui dare delle regole per costruire tali proposizioni composte e per determinare i loro valori di verità, dati che siano i valori di verità delle proposizioni componenti.

Per costruire le proposizioni composte faremo uso dei simboli categorematici che indicano le proposizioni e di certi altri simboli, sincategorematici, che diremo “connettivi”.

Il primo simbolo sincategorematico che prenderemo in considerazione è il simbolo di negazione. Esso sarà rappresentato ponendo il simbolo “ \neg ” davanti al simbolo della proposizione che si intende negare.

Pertanto, data per es. la proposizione indicata con A , la sua negazione sarà indicata con il simbolo

$$\neg A$$

da leggersi “non A ”; questa proposizione sarà falsa se la A è vera, vera se la A è falsa.

Il simbolo di negazione è l’unico simbolo sincategorematico che opera su una unica proposizione. Presenteremo qui altri connettivi che ci serviranno per costruire delle proposizioni composte con due altre.

Abbiamo detto poco fa che ci interessa soltanto il valore di verità di una proposizione; quindi, se una data proposizione è composta con due altre (e ovviamente con un connettivo) i casi che si possono presentare sono quattro soltanto.

Stabiliremo un ordine convenzionale, che manterremo sempre nel seguito, per enumerare tutti i casi possibili di valori di verità che possono essere assunti da due proposizioni A e B con le quali viene composta una terza proposizione. Tale ordine convenzionale è dato dalla seguente tabella:

(1)

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0

Di conseguenza ogni connettivo sarà determinato dai valori di verità che la proposizione corrispondente assume quando i valori di verità delle due proposizioni componenti sono dati nell’ordine che è stabilito dalla tabella (1), che non ripeteremo più nel seguito, limitandoci a dare i quattro valori di verità che corrispondono ai casi enumerati nell’ordine scelto.

Si suol dire che i quattro valori di verità che corrispondono ad un determinato connettivo formano la “matrice di verità” del connettivo stesso.

Enumereremo qui di seguito i connettivi che sono di uso più frequenti nella logica delle proposizioni.

1) Connettivo “et” (che viene anche indicato col termine inglese “and”); la proposizione che si ottiene da due date mediante l'utilizzazione di questo connettivo viene abitualmente indicata ponendo il simbolo “ \wedge ” tra i simboli delle due; date per es. le proposizioni A e B si scriverà quindi il simbolo

$$(2) \qquad A \wedge B$$

da leggersi “ A et B ” oppure “ A and B ”.

La matrice di verità della proposizione (2) è data dalla seguente tabella, nella quale — ripetiamo — i casi sono elencati nell'ordine dato dalla tabella (1):

$$(3) \qquad 1, 0, 0, 0 ;$$

pertanto la proposizione (2) è vera nel solo caso in cui sono vere entrambe, la A e la B .

La operazione che, a partire delle due proposizioni A e B conduce alla proposizione composta (2) viene chiamata “congiunzione” oppure anche “prodotto logico” delle due proposizioni.

2) Connettivo “vel” (che viene anche indicato con il termine inglese “or”); la proposizione che nasce da due date in forza di questo connettivo viene indicata ponendo il segno “ \vee ” tra i simboli delle due proposizioni; date le due proposizioni A e B si scriverà quindi il simbolo

$$(4) \qquad A \vee B$$

da leggersi “ A vel B ” oppure “ A or B ”. I valori di verità della proposizione (4) sono dati dalla seguente tabella

$$(5) \qquad 1, 1, 1, 0 ;$$

pertanto la proposizione (4) è vera quando anche una sola delle due pro-

posizioni A e B è vera; in altre parole, la proposizione (4) è falsa nel solo caso in cui siano false entrambe, la A e la B , e vera in tutti gli altri casi.

La operazione che, a partire dalle due proposizioni semplici A e B conduce alla proposizione composta (4) viene anche chiamata “alternativa” o anche “somma logica” delle due proposizioni.

3) Connettivo “freccia”.

La proposizione che nasce da due date mediante questo connettivo viene indicata ponendo una freccia “ \rightarrow ” tra i simboli delle due; pertanto, date le due A e B la proposizione composta si scriverà

$$(6) \quad A \rightarrow B .$$

La lettura del simbolo (6) viene fatta in vari modi; si usa leggere per es. “Se A allora B ” ed il simbolo “freccia” viene chiamato “simbolo di implicazione materiale”.

I valori di verità della proposizione (6) sono dati dalla tabella seguente:

$$(7) \quad 1 , 0 , 1 , 1 .$$

Questi valori di verità sono gli stessi della proposizione

$$(8) \quad \neg A \vee B ;$$

pertanto alcuni autori considerano la proposizione (6) come una forma diversa della proposizione (8)

4) Connettivo “doppia freccia”. La proposizione che si ottiene mediante la utilizzazione di questo connettivo viene indicata ponendo il segno “ \leftrightarrow ” tra i simboli delle due proposizioni date; date per es. A e B si scriverà

$$(9) \quad A \leftrightarrow B ;$$

simbolo che potremo leggere convenzionalmente “ A doppia freccia B ” oppure anche “ A è equivalente a B ”.

I valori di verità della proposizione (9) sono dati dalla tabella seguente:

$$(10) \quad 1 , 0 , 0 , 1 ;$$

pertanto la proposizione (9) risulta vera se entrambe la A e la B sono vere oppure se sono entrambe false.

Ciò spiega anche la convenzione di lettura secondo la quale il connettivo doppia freccia viene anche chiamato connettivo di equivalenza.

Notiamo tuttavia che questa lettura può indurre in equivoci e confusioni, perché non ha lo stesso significato della relazione di equivalenza tra proposizioni che abbiamo indicato nel § 1 con il simbolo convenzionale “ \Leftrightarrow ”.

Invero in quel caso si tratta di proposizioni analizzate ognuna delle quali, assunta come ipotesi, può condurre alla dimostrazione dell'altra come tesi, quando ovviamente si intendano conosciute le regole della logica deduttiva e quando anche, in un certo ambito di teoria, si ammettano come note altre proposizioni non ricordate esplicitamente nella enunciazione della equivalenza.

5) Connettivo “sbarra”. La proposizione che si ottiene mediante la utilizzazione di questo connettivo viene indicata ponendo una sbarra verticale “ $|$ ” tra i simboli delle due date. Date per es. A e B si scriverà

$$(11) \qquad A | B$$

simbolo che potremmo leggere convenzionalmente “ A sbarra B ”.

I valori di verità della proposizione (11) sono dati dalla tabella seguente:

$$(12) \qquad 0, 0, 0, 1;$$

pertanto la proposizione (11) è vera nel solo caso in cui entrambe le due proposizioni A e B siano false, e falsa in tutti gli altri casi.

Vedremo nei prossimi §§ come si possano costruire delle proposizioni composte in cui figurano più di due proposizioni semplici, oppure si possano costruire delle espressioni più complicate di quelle che abbiamo presentato.

Per ora la questione più importante consiste nel dare regole che permettano di calcolare i valori di verità delle proposizioni composte a partire da quelli delle proposizioni semplici; daremo quindi nel prossimo § delle regole di calcolo che riattaccano gli sviluppi che qui abbiamo esposto con certi capitoli dell'aritmetica elementare.

3 — Indichiamo con $x, y, z...$ dei numeri interi; è noto che ogni intero, diviso per 2, dà come resto zero oppure 1, a seconda che si rispettivamente pari oppure dispari.

Diremo che due numeri, x ed y , sono congruenti oppure congrui modulo due, se avviene che, divisi per 2, diano resti uguali. La relazione tra due numeri congruenti rispetto al modulo 2 viene indicata con il simbolo

$$(1) \quad x \equiv y \pmod{2}$$

che viene letta “ x è congruente ad y modulo 2”.

Da quanto è stato ora detto, la relazione (1) vale se i due numeri x ed y sono entrambi pari oppure entrambi dispari. Tale relazione possiede le proprietà formali riflessiva, simmetrica e transitiva.

Tali proprietà sono espresse dalle seguenti relazioni simboliche

$$x \equiv x \pmod{2} \quad (\text{proprietà riflessiva})$$

$$(2) \text{ se } x \equiv y, \text{ allora anche } y \equiv x \pmod{2} \quad (\text{proprietà simmetrica})$$

$$\text{se } x \equiv y \text{ ed anche } y \equiv z, \text{ allora } x \equiv z \pmod{2} (\text{proprietà transitiva}).$$

Pertanto, rispetto alla relazione di congruenza modulo 2, tutti gli interi possono essere suddivisi in due classi, che sono costituite dai numeri dispari oppure dai numeri pari.

È possibile inoltre verificare che alle operazioni eseguite sui numeri interi corrispondono certe operazioni che si possono pensare eseguite sui resti della divisione dei numeri stessi per 2; tali operazioni possono essere chiamate con gli stessi nomi che si usano per quelle che si eseguono sui numeri: somma e prodotto; inoltre per queste operazioni valgono le stesse proprietà che sussistono per le operazioni omonime sui numeri: commutativa ed associativa per la somma, commutativa ed associativa per il prodotto, distributiva del prodotto rispetto alla somma.

Si ottiene così una particolare aritmetica, che opera soltanto su due simboli, precisamente zero e 1 (uno). Per tale aritmetica valgono le seguenti leggi delle operazioni

Per la somma:

$$\begin{aligned}0 + 1 &= 1 + 0 = 1 \\0 + 0 &= 1 + 1 = 0 \quad .\end{aligned}$$

(3)

Per il prodotto:

$$\begin{aligned}1 \times 0 &= 0 \times 1 = 0 \times 0 = 0 \\1 \times 1 &= 1 \quad .\end{aligned}$$

Conseguono da queste leggi due proprietà che valgono per ogni espressione:

$$a + a = 2 a = 0 \quad ; \quad a^2 = a \quad .$$

Utilizzeremo per questa aritmetica le abituali leggi che valgono per le espressioni numeriche ed algebriche. In particolare terremo presenti le leggi secondo le quali le operazioni di prodotto vengono eseguite prima delle operazioni di somma; e converremo di scrivere direttamente uno accanto all'altro i simboli di due numeri che si vogliono moltiplicare tra loro, omettendo il segno di operazione di prodotto.

Queste regole elementari, che riguardano i simboli numerici e le operazioni su di essi, ammettono una interessante applicazione al calcolo dei valori di verità delle proposizioni composte. A tal fine daremo qui di seguito le matrici di verità delle proposizioni composte con i connettivi che abbiamo presentato nel § precedente, ed accanto a ciascuna di esse daremo anche la formula che permette di calcolare il valore di verità di una proposizione composta a partire dai valori delle proposizioni semplici. Si intende che le operazioni aritmetiche sono eseguite nella aritmetica modulo 2 che abbiamo introdotto e che in particolare ad ogni valore numerico che si ottiene può essere sostituito il resto della sua divisione per 2.

Anzitutto si verifica che, indicato con a il valore di verità della proposizione A , il valore della negazione $\neg A$ è $a + 1$. I valori delle proposizioni composte con i connettivi che abbiamo presentato sono dati dalla Tabella seguente.

Con l'utilizzazione di queste formule è possibile ricondurre la verifica di certe proprietà logiche al calcolo aritmetico, e la soluzione di certi problemi logici alla soluzione di problemi che si possono tradurre in formule e risolvere come dei problemi algebrici, nel senso abituale del termine.

Connettivo	Matrice di verità	Formula che fornisce il valore di verità nell'aritmetica modulo 2
$A \wedge B$	1,0,0,0	ab
$A \vee B$	1,1,1,0	$ab + a + b$
$A \rightarrow B$	1,0,1,1	$ab + a + 1$
$A \leftrightarrow B$	1,0,0,1	$a + b + 1$
$A B$	0,0,0,1	$ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$

4. — Con i connettivi che abbiamo introdotto nel § precedente si possono costruire delle proposizioni composte che contengono diversi connettivi e più di due simboli di proposizione. A tal fine adotteremo la convenzione sull'uso delle parentesi che viene abitualmente adottata in matematica: precisamente intenderemo che una espressione che viene posta tra parentesi deve essere considerata come un tutto unico, ed il suo valore di verità deve essere calcolato prima che venga calcolato il valore di verità delle proposizioni composte, cominciando dalle parentesi più interne. Tuttavia, per evitare il moltiplicarsi di segni di parentesi, si suole anche introdurre una gerarchia convenzionale tra i connettivi, con le regole seguenti:

i) il segno di negazione “ \neg ” si intende operare solo sulla proposizione il cui simbolo segue immediatamente il segno stesso. Così, per esempio, la espressione, già introdotta

$$(1) \quad \neg A \vee B$$

indica l'operazione “vel” tra la proposizione “non A ” e la proposizione B . Se si volesse negare la proposizione “ $A \vee B$ ” occorrerebbe scrivere:

$$(2) \quad \neg (A \vee B) .$$

Esempi analoghi si costruiscono con il connettivo “et” e con i connettivi “freccia” e “doppia freccia”.

ii) I connettivi “freccia” e “doppia freccia” hanno una portata che supera quella dei connettivi “et” e “vel”. Così per esempio la proposizione:

$$(3) \quad A \rightarrow B \wedge A$$

ha il significato che le compete dal connettivo “freccia” che ha come antecedente la proposizione A e come conseguente la proposizione $B \wedge A$. Di conseguenza tale proposizione ha i valori di verità dati dalla tabella seguente:

$$(4) \quad 1,0,1,1;$$

se si volesse alterare la portata del connettivo “et” occorrerebbe mettere delle parentesi, per esempio scrivendo

$$(5) \quad (A \rightarrow B) \wedge A$$

la quale ha i valori di verità dati dalla tabella seguente:

$$(6) \quad 1,0,0,0 \quad .$$

Ripetiamo che si intende che l'ordine in cui sono elencati i valori di verità delle tabelle (4), (6) si riferisce all'ordine dei casi che viene presentato dalla Tab. (1) del § precedente.

Con le regole precedenti è possibile costruire una proposizione comunque complessa, contenente un numero qualsivoglia di simboli categorematici congiunti da simboli sincategorematici; occorre tuttavia assegnare delle regole che permettono di distinguere una successione di simboli cosiffatti che conveniamo di accettare come dotata di senso dalle altre. Una successione di simboli che viene accettata nel nostro calcolo delle proposizioni viene chiamata una “formula ben formata”, espressione che viene convenzionalmente indicata col simbolo “*fbf*”.

Tali regole sono le seguenti:

- 1) i simboli alfabetici categorematici, che indicano le proposizioni semplici, sono delle *fbf*;

- 2) Indicata con P una *fbf*, anche $\neg P$ è una *fbf*;
- 3) Indicate con P e Q due *fbf*, anche $P \wedge Q$ e $P \vee Q$ sono delle *fbf*;
- 4) nessuna altra successione di simboli è una *fbf*.

Con queste regole è possibile costruire delle espressioni di lunghezza qualsivoglia e determinare i valori di verità, in funzione dei valori di verità delle proposizioni elementari che le compongono. Per esempio si può considerare la proposizione

$$(7) \quad (A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B) \quad ;$$

questa è una *fbf*, ed i suoi valori di verità, sempre con le convenzioni di ordinamento date dalla Tab. (1), sono dati dalla tabella seguente:

$$(8) \quad 0,1,1,0 \quad ;$$

pertanto la proposizione composta (7) risulta vera quando e solo quando una delle due proposizioni A oppure B è vera e l'altra è falsa; essa quindi rende il senso della espressione che nelle frasi latine (ma anche nell'uso della lingua italiana) viene formulata con le parole "aut...aut ..."

5 — Tra le proposizioni composte hanno particolare importanza quelle che hanno valore di verità uguale ad 1, quali che siano i valori di verità delle proposizioni componenti. Tali proposizioni vengono spesso chiamate "tautologie" ed alcune di queste traducono dei modi validi di ragionare che vengono abitualmente utilizzati anche nella vita comune; pertanto li presenteremo qui collegandoli con i nomi che la logica classica dava a questi schemi validi, anche se questi nomi sono stati dati in contesti ovviamente diversi.

Osserviamo anzitutto che una tautologia che coinvolge una sola proposizione può essere la seguente:

$$(1) \quad \neg A \vee A$$

che può essere anche scritta nella forma

$$(2) \quad A \rightarrow A \quad .$$

La verifica che queste proposizioni hanno valore di verità sempre uguale ad 1 si può fare ricorrendo alle tabelle del § 2; analoghe considerazioni possono essere svolte a proposito delle proposizioni più complicate che presenteremo nel seguito di questo §.

i) Modus ponendo ponens:

$$(3) \quad [(A \rightarrow B) \wedge A] \rightarrow B$$

ii) Modus tollendo tollens:

$$(4) \quad [(A \rightarrow B) \wedge \neg B] \rightarrow \neg A$$

iii) Modus tollendo ponens:

$$(5) \quad [(A \vee B) \wedge \neg A] \rightarrow B ;$$

iv) Modus ponendo tollens:

$$(6) \quad [\neg (A \wedge B) \wedge A] \rightarrow \neg B ;$$

v) Argumentum “a fortiori”:

$$(7) \quad (A \wedge B) \rightarrow A ;$$

vi) Reductio ad absurdum (prima forma)

$$(8) \quad (A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A ;$$

vii) Reductio ad absurdum (seconda forma):

$$(9) \quad [A \rightarrow (B \wedge \neg B)] \rightarrow \neg A ;$$

viii) Dilemma costruttivo:

$$(10) \quad [(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (A \vee B)] \rightarrow C ;$$

ix) Dilemma distruttivo:

$$(11) \quad [[A \rightarrow (B \vee C)] \wedge (\neg B \wedge \neg C)] \rightarrow \neg A ;$$

Praeclarum theorema di W.G. Leibnitz

$$(12) \quad [(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)] \rightarrow [(A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)] \ ;$$

x) Infine la seguente tautologia

$$(13) \quad \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

traduce in formule il significato della sentenza che viene espressa in latino dicendo "ex falso sequitur quodlibet", che significa che da una premessa falsa si può dedurre qualunque conseguenza, tanto vera che falsa.

Ricordiamo infine due schemi di argomentazione che *non* costituiscono tautologie; pertanto questi schemi *non* rappresentano dei procedimenti conclusivi validi quali che siano i valori di verità delle proposizioni che vi fanno parte; tuttavia essi sono spesso presentati come schemi validi ed utilizzati per trarre delle conclusioni.

Pensiamo quindi che il lettore possa utilmente prendere coscienza della esistenza di questi schemi per poter evitare di utilizzarli, e confutare eventualmente le argomentazioni (ripetiamo, frequenti) che sono fondati su di essi. Tali schemi sono dati dalle proposizioni seguenti:

$$(14) \quad [(A \rightarrow B) \wedge B] \rightarrow A \ ,$$

che non è una tautologia, perché ha i suoi valori di verità dati dalla seguente tabella:

$$(15) \quad 1, 1 \ , \ 0 \ , \ 1 \ ,$$

e dalla proposizione:

$$(16) \quad [(A \rightarrow B) \wedge \neg A] \rightarrow \neg B$$

che non è una tautologia, perché i suoi valori di verità sono dati dalla tabella (15).

6. — Hanno particolare importanza per il seguito certe tautologie che esprimono delle equivalenze tra proposizioni composte e costituiscono

no quindi le regole di calcolo dell'algebra delle proposizioni. Elenchiamo qui di seguito tali tautologie, invitando il lettore a verificare la loro validità ed a confrontare la tabella delle proposizioni che elencheremo con la Tabella delle regole dell'algebra di Boole degli insiemi, che abbiamo dato al § 14 del Cap. III.

$$(1) \quad \neg \neg A \leftrightarrow A$$

(legge della doppia negazione);

$$(2) \quad A \leftrightarrow A \vee A \quad ; \quad A \leftrightarrow A \wedge A$$

(proprietà di idempotenza delle operazioni di “vel” e “et”);

$$(3) \quad \begin{cases} A \vee B \leftrightarrow B \vee A \\ A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A \end{cases}$$

(proprietà commutativa delle due operazioni);

$$(4) \quad \begin{cases} A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C \\ A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C \end{cases}$$

(proprietà associativa delle operazioni);

$$(5) \quad \begin{cases} A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{cases}$$

(proprietà distributiva di ciascuna delle operazioni rispetto all'altra);

$$(6) \quad A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A \quad ; \quad A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A \quad ;$$

$$(7) \quad \begin{cases} \neg (A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B \\ \neg (A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \end{cases}$$

(leggi di De Morgan).

Abbiamo dato alle tautologie precedenti dei nomi che fanno riferimento a certe proprietà delle operazioni di composizione delle proposizioni; tali denominazioni fanno capire che è possibile costruire un calcolo delle proposizioni, analogo al calcolo algebrico, il quale permette di trasformare le proposizioni composte, in modo da conservare il loro valore di verità, in funzione dei valori di verità delle proposizioni semplici componenti.

Pertanto riterremo lecito, in ogni proposizione composta in cui figurasse una delle proposizioni che sono da una parte del segno delle equivalenze che abbiamo scritto sopra, sostituire la proposizione che sta dall'altra parte del segno di equivalenza.

In particolare è quindi possibile ridurre ogni espressione che contiene varie proposizioni ad una forma canonica, analoga a quella che abbiamo dato nel § 14 del Cap. III per le espressioni dell'algebra di Boole degli insiemi.

A titolo di esercizio e di esempio daremo qui di seguito la espressione delle proposizioni composte, ottenute con i diversi connettivi, fatta con il connettivo "sbarra" che abbiamo introdotto al § 2. Il lettore potrà verificare, con le operazioni dalla aritmetica modulo 2, che le proposizioni di ogni riga della tabella seguente hanno lo stesso valore di verità.

$\neg A$	$A \mid A$
$A \wedge B$	$(A \mid A) \mid (B \mid B)$
$A \vee B$	$(A \mid B) \mid (A \mid B)$
$A \rightarrow B$	$[(A \mid A) \mid B] \mid [(A \mid A) \mid B]$

Chiuderemo questo § presentando un esempio di risoluzione di un problema logico con l'impiego dei concetti esposti nei §§ 2, 3.

Problema. Ci fu un furto in un grande magazzino.

L'inchiesta diede i seguenti risultati:

- i) Se il colpevole è un uomo, è di piccola statura*
- ii) Se egli è di piccola statura, egli entrò attraverso la finestra;*
- iii) il colpevole è un uomo, o quanto meno indossò abiti maschili;*
- iiij) Se indossò abiti maschili, ammesso che il racconto del testimone oculare sia degno di fede, egli entrò per la finestra.*

La visita al luogo del misfatto mostrò peraltro che il colpevole non era entrato dalla finestra.

Si tratta di scoprire il colpevole.

Indicheremo con le seguenti lettere maiuscole le proposizioni:'

U: il colpevole è un uomo;

P: il colpevole è di piccola statura;

M: il colpevole indossò abiti maschili;

F: il colpevole entrò per la finestra;

T: il testimone ha fatto un racconto degno di fede.

Indicheremo con le lettere minuscole corrispondenti i valori di verità delle proposizioni sopra rappresentate.

Le proposizioni enunciate nel problema possono essere tradotte con l'impiego dei connettivi nel modo seguente:

i) $U \rightarrow P$

ii) $P \rightarrow F$

iii) $U \vee M$

iiij) $M \rightarrow (T \rightarrow F)$. . .

Secondo la Tabella presentata nel § 2 tradurremo ora le proposizioni con i simboli dell'aritmetica modulo 2, assegnando anche alle proposizioni i valori numerici che loro competono in base al fatto che tali proposizioni sono affermate.

Quindi per es. la proposizione i) ha i valori di verità dati, in funzione di u e p dalla formula

$$up + u + 1 ;$$

questo valore deve essere uguale ad 1, perché la proposizione viene affermata. Si ha quindi la equazione numerica:

$$(8) \quad up + u = u (p + 1) = 0 \quad .$$

Analogamente, sempre tenendo conto della tabella del § 2 ed attribuendo il valore di verità 1 alle proposizioni affermate, si trovano le equazioni

$$(9) \quad p (f + 1) = 0$$

$$(10) \quad (m + 1) (u + 1) = 0$$

$$(11) \quad mt (f + 1) = 0 \quad .$$

Inoltre dall'ultima affermazione del problema si trae che nelle equazioni scritte deve essere fatto

$$(12) \quad f = 0 \quad .$$

Dalla (9) si trae allora

$$(13) \quad p = 0 \quad ;$$

e con questo risultato, introdotto nella (8) si ha

$$(14) \quad u = 0 \quad .$$

Di qui, tenendo conto della (10) si ha

$$(15) \quad m = 1 \quad ;$$

i risultati (12) e (15) introdotti nella (11) conducono al risultato:

$$(16) \quad t = 0 \quad .$$

Quindi il testimone non è degno di fede, il colpevole non era un uomo, non era di piccola statura ed era travestito da uomo.

· 7 — Abbiamo finora presentato le operazioni sulle proposizioni con riferimento ai valori di verità; è possibile tuttavia trattare la materia ed un livello più astratto, considerando i simboli categorematici e i connettivi senza riferimento al significato che abbiamo loro attribuito finora. In questo ordine di idee quindi si può introdurre un insieme di simboli con certe leggi di trasformazione, che a partire da certe espressioni che vengono date all'inizio e che vengono chiamate "assiomi", conducono a certe proposizioni costituenti una successione che può essere chiamata "teoria".

Come assiomi possiamo scegliere i tre seguenti:

$$(1) \quad A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$(2) \quad [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$$

$$(3) \quad (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow [(\neg B \rightarrow A) \rightarrow B] .$$

Da queste espressioni si possono trarre altre quantesivogliono con le seguenti regole:

i) regola di sostituzione: in una espressione è lecito sostituire ad una lettera la espressione di una formula ben formata.

ii) Se nella successione di proposizioni che così si ottiene si ha una formula P e una formula $P \rightarrow Q$, è lecito introdurre la espressione Q nella successione. Questa regola viene spesso richiamata con la espressione "modus ponendo ponens" o anche semplicemente "modus ponens" o anche infine "regola del distacco".

Daremo qui un esempio della applicazione di queste regole, per costruire una espressione che non sta nell'elenco delle proposizioni di partenza.

Per regola i), ponendo nella (1) A al posto di B si ottiene la

$$(4) \quad A \rightarrow (A \rightarrow A) .$$

Ponendo, ancora nella (1), al posto di B la formula ben formata $A \rightarrow A$ si ottiene

$$(5) \quad A \rightarrow [(A \rightarrow A) \rightarrow A] .$$

Ponendo nella (2), al posto di C la lettera A e ponendo al posto della lettera B la formula ben formata $A \rightarrow A$ si ottiene:

$$(6) \quad \{ A \rightarrow [(A \rightarrow A) \rightarrow A] \} \rightarrow \{ [A \rightarrow (A \rightarrow A)] \rightarrow (A \rightarrow A) \}$$

Da questa, applicando due volte la regola ii), e tenendo conto delle (4) e (5) si ottiene

$$(7) \quad A \rightarrow A$$

formula ben formata e quindi può essere aggiunta all'elenco delle formule che costituiscono la nostra teoria.

La impostazione che abbiamo presentato ora dà un'idea del modo di ragionare, puramente formale, che si può seguire nella trattazione dei problemi riguardanti la deduzione. Tuttavia possiamo chiederci quale sia il rapporto tra la visione che abbiamo ora succintamente presentato e la trattazione che abbiamo dato nei precedenti paragrafi, collegando il concetto di proposizione non analizzata con quello dei valori di verità.

A tal fine chiamiamo "deducibile" ogni formula ben formata che si può ottenere dalle formule iniziali (assiomi) (1), (2), (3) con le operazioni indicate dalle regole i) e ii); per indicare che una formula ben formata P si può ottenere dagli assiomi mediante le regole i) e ii) si suol scrivere la formula convenzionale

$$(8) \quad \vdash P$$

che si potrebbe leggere: " P è deducibile" (sottinteso dagli assiomi, con la applicazione delle regole di deduzione).

Ora si verifica che, utilizzando le matrici di verità dei connettivi introdotte al § 2, le proposizioni (1), (2), (3), che abbiamo assunte come proposizioni iniziali, sono delle tautologie, cioè hanno valore di verità 1 quale che sia il valore di verità delle proposizioni componenti.

Questa affermazione può essere enunciata anche per qualunque formula ben formata che si possa dedurre dalle proposizioni suddette con l'applicazione delle regole di deduzione; in modo ancora più generale si può dimostrare che, data che sia una formula ben formata, con un numero finito di verifiche si può accertare se essa è una tautologia oppure no.

Questa proposizione si suole presentare sotto forma di un teorema che viene chiamato "Teorema di decidibilità".

Il suo enunciato potrebbe essere dato nella forma seguente:

Teorema — Data che sia una formula ben formata del calcolo delle proposizioni, è possibile decidere, con un numero finito di operazioni, se essa è una tautologia oppure no.

Si può anche dimostrare il teorema inverso il quale potrebbe essere enunciato con la frase seguente:

Teorema — Una tautologia (cioè una formula ben formata che ha valore di verità 1 quali siano i valori di verità delle proposizioni componenti) è deducibile.

Ciò significa che, data una tautologia, esiste una catena finta di operazioni che, partendo dagli assiomi enunciati, permette di dedurre la formula che la esprime.

Questo teorema viene anche detto “teorema di completezza semantica” del calcolo sulle proposizioni.

Nelle righe che precedono abbiamo più volte detto che le proposizioni (1), (2), (3) sono state scelte come proposizioni iniziali della nostra teoria logica. È possibile tuttavia scegliere altri sistemi di proposizioni per fondare una logica delle proposizioni non analizzate.

Ognuno di tali sistemi viene chiamato equivalente al precedente, nel senso che le sue proposizioni iniziali possono essere costruite con l'applicazione delle regole di deduzione da quelle che abbiamo enunciate, e viceversa.

Un sistema di proposizioni cosiffatto per esempio è costituito dalle seguenti proposizioni (assiomi):

$$(9) \quad A \vee A \rightarrow A$$

$$(10) \quad A \rightarrow A \vee A$$

$$(11) \quad A \vee B \rightarrow B \vee A$$

$$(12) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)] \quad .$$

8. — La teoria delle proposizioni non analizzate che abbiamo esposto finora, pur permettendo di ottenere dei risultati importanti nel campo della deduzione, non è tuttavia sufficiente per risolvere alcuni dei problemi che hanno portato alle invenzioni dei metodi della logica simbolica.

In particolare gli strumenti che abbiamo esposto finora non sono sufficienti per analizzare logicamente in modo rigoroso il concetto di numero intero naturale, che è il concetto fondamentale della aritmetica elementare e quindi di tutta la matematica.

Per quanto riguarda il concetto di numero naturale, si può ripetere ciò che abbiamo già detto a proposito della definizione dei concetti fondamentali nel § 2 del Cap. II: si tratta di un concetto talmente elementare e fondamentale di tutto il nostro modo di ragionare e di guardare alla realtà che non è possibile ricondurlo ad altri più semplici; pertanto per definirlo occorre far ricorso al procedimento delle “definizioni d’uso” o definizioni per postulati, enunciando semplicemente delle proposizioni primitive nelle quali il concetto viene nominato e messo in relazione con altri, pure fondamentali: la definizione di tutti questi concetti scaturisce implicitamente dalle proposizioni enunciate, che danno in certo modo le ‘regole di gioco’ con cui si intende di poter manovrare.

Nel caso del concetto di numero naturale la cosa appare particolarmente interessante anche perché, come abbiamo già detto nel § 3 del Cap. III, l’insieme dei numeri interi naturali ci si presenta come il primo esempio (e forse il più semplice) di insieme infinito; di un insieme cioè per il quale non è possibile dare l’elenco, l’anagrafe di tutti gli elementi, perché tale elenco è destinato a non chiudersi mai.

In concetto di numero naturale è stato oggetto di studio e di analisi dalla antichità più lontana; nel secolo scorso esso venne trattato da vari matematici che cercarono di rendere rigorosa la trattazione, enunciando certe proprietà essenziali e soprattutto cercando di definire il numero e di dimostrare le proprietà più importanti delle sue operazioni.

Esporremo qui di seguito la trattazione che il matematico italiano G. Peano diede dell’argomento, rinunciando ad una definizione esplicita del numero intero ed enunciando invece cinque proposizioni primitive che ancora oggi vengono richiamate universalmente come ‘gli assiomi di Peano’.

Prima di enunciarli, ricordiamo ancora che in tutte le lingue civili il concetto di numero intero assume due aspetti fundamentalmente diversi, anche se strettamente collegati tra loro: l’aspetto del numero cardinale e quello del numero ordinale.

In forma molto rudimentale e approssimata potremmo dire che noi rispondiamo con un numero cardinale alla domanda “Quanti sono gli elementi di un certo insieme” e rispondiamo con un numero ordinale alla domanda: “Che posto ha un determinato elemento nella enumerazione degli elementi di un certo insieme”.

Abbiamo detto che i due aspetti del numero intero sono distinti, anche se strettamente collegati tra loro; di fatto, quando si possa in qualche modo fare una analisi rigorosa dell'uno, anche l'altro può essere considerato come dominato pienamente.

In questo ordine di idee, G. Peano scelse di tradurre in modo rigoroso il concetto di numero intero ordinale, riservandosi di definire poi il concetto di numero cardinale degli elementi di un insieme attraverso opportune definizioni.

Egli parte da tre concetti primitivi, oltre a quelli della logica elementare: un insieme, quello dei numeri interi, che egli indica con il simbolo “ N_0 ”; un elemento di questo insieme, che egli indica con il simbolo “ 0 ” (zero); una operazione, che a partire da un elemento dell'insieme N_0 produce un altro elemento dello stesso insieme: tale operazione può essere indicata preponendo il simbolo “succ” al nome di un elemento di N_0 ; pertanto indicato con a il nome di un numero, il simbolo

succ a

può essere letto “successivo di a ”.

Gli assiomi enunciati da Peano possono essere tradotti in parole con le frasi seguenti:

- 1 — 0 è un N_0 (o anche: lo zero è un numero).
- 2 — Se a è un N_0 anche succ a è un N_0 (o anche: il successivo di un numero è un numero).
- 3 — Se s è un insieme di numeri, 0 appartiene ad s e se, quando un numero a appartiene ad s allora anche succ a appartiene ad s , allora ogni numero è un s .
- 4 — Se succ $a =$ succ b , allora $a = b$.
- 5 — Se a è un numero, succ a è diverso dallo zero.

L'assioma 3 viene anche chiamato “assioma di induzione”; esso afferma che una classe di numeri che contiene lo zero e che, insieme con un numero qualunque a , contiene anche succ a , contiene tutti i numeri.

Su questo assioma si fondano le dimostrazioni che Peano dà delle proprietà delle operazioni che egli definisce sui numeri; esso, enunciato esplicitamente, ha permesso la dimostrazione rigorosa di certe proprietà dei numeri che prima di allora erano state lasciate alla generalizzazione di ogni lettore o ascoltatore; in forma forse meno precisa, ma più suggestiva, si potrebbe dire che l'assioma di induzione permette di dominare con un numero finito di simboli linguistici tutto l'insieme infinito dei numeri, che si possono ottenere dal primo di essi (lo zero) mediante la applicazione ripetuta della operazione "successivo di".

Non possiamo entrare qui in particolari tecnici, e mostrare come Peano riesca a definire le operazioni sui numeri interi ed a dimostrare tutte le proprietà note dell'aritmetica elementare.

Tuttavia, prima di ricordare le poche proprietà dei numeri interi di cui ci serviremo, vogliamo qui osservare che il sistema di postulati di Peano è soltanto uno tra i tanti che sono possibili e che circoscrivono il concetto di numero intero; vorremmo qui fare esplicitamente questa osservazione, ricordando che di conseguenza il fatto che una proposizione sia un teorema (cioè possa essere dimostrata a partire da quelle che la precedono, in una determinata teoria) oppure sia un postulato (o proposizione primitiva) dipende non dalla proposizione singola, presa in sé, ma dalla scelta dell'ordinamento che il trattista ha fatto, decidendo che certe proposizioni fossero enunciate all'inizio e quindi non fossero dimostrate, ed altre invece fossero dimostrate sul fondamento delle precedenti.

In altre parole, la scelta delle proposizioni primitive è — come dice U. Cassina citato al § 2 del Cap. II — un atto di imperio del trattista, cioè una scelta di costui che non ha nessun legame che lo costringa a enunciare un dato sistema di postulati piuttosto che un altro. Di fatto, per esempio, sono stati dati altri sistemi di proposizioni primitive per l'aritmetica elementare e per il concetto di numero intero naturale; in queste trattazioni la proposizione N° 3, che Peano sceglie come primitiva, può invece essere dimostrata come un teorema, semplicemente perché sono state enunciate prima delle proposizioni non dimostrate che permettono di dimostrare l'assioma che Peano enuncia senza dimostrazione.

Ciò pone un certo numero di problemi che analizzeremo in seguito, e che costituiscono un notevole capitolo della logica contemporanea.

9. — Ricordiamo qui alcuni teoremi di aritmetica elementare, che erano già noti alla matematica greca, e che possono essere dimostrati a partire dagli assiomi di Peano.

A tali fine ricordiamo che un numero intero viene chiamato “primo” se non ha divisori diversi da se stesso e dall’unità. Per esempio, i numeri interi che sono primi e minori di 100 sono i seguenti:

Tab. I

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97					

Per i numeri primi valgono in particolare i due teoremi seguenti che si trovano già — come abbiamo detto — presso i matematici greci:

- 1 — Il numero dei numeri primi è infinito;
- 2 — Ogni numero intero o è primo, oppure può essere decomposto in un unico modo nel prodotto di fattori primi, a prescindere dall’ordine in cui i fattori sono iscritti.

Per esempio il numero 90 può essere scritto come prodotto di fattori primi nel modo seguente:

$$90 = 5 \times 3 \times 2 \times 3 .$$

Lo stesso numero può essere rappresentato come prodotto alterando l’ordine dei fattori; ma questi restano sempre gli stessi; quindi, convenendo di mettere i fattori primi nell’ordine naturale che è dato dallo loro grandezza, si può scrivere in un unico modo:

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5 .$$

Su questi due teoremi è basato un classico procedimento di codificazione, che permette di associare in modo biunivoco un numero ad ogni simbolo linguistico.

A tal fine, facciamo corrispondere ad ogni lettera dell’alfabeto un numero, per esempio nel modo seguente:

Tab. II

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Consideriamo ora una qualunque parola, per es. la parola ALI: alla lettera che ha il primo posto facciamo corrispondere il primo numero dell'elenco I, elevato alla potenza data dall'esponente che corrisponde alla lettera stessa nella tabella II; quindi alla prima A facciamo corrispondere il numero

$$2^1 = 2;$$

alla seconda lettera facciamo corrispondere il secondo numero primo, elevato alla potenza corrispondente al numero d'ordine della lettera nella tabella I: quindi

$$3^{12} = 531441$$

alla terza lettera facciamo corrispondere il terzo numero primo, elevato all'esponente che corrisponde alla lettera I della Tabella II: quindi

$$5^9 = 1953125 \ .$$

Moltiplichiamo poi i tre numeri così ottenuti e troveremo:

$$2 \times 531441 \times 1953125 = 2.075.941.406.250 \ .$$

Viceversa, quando sia dato il numero precedente, a norma del teorema sopra ricordato, tale numero può essere rappresentato *in un unico modo* sotto forma di prodotto di potenza di numeri primi, e precisamente esso può essere rappresentato nella forma

$$2^1 \times 3^{12} \times 5^9 \ .$$

Pertanto, secondo le convenzioni sopra esposte, a questo numero corrisponde la parola che come prima lettera (corrispondente al primo numero primo, il 2) ha la lettera che corrisponde nella tabella II all'esponente 1, cioè la A; come seconda lettera (corrispondente al secondo fattore primo, il 3) ha la lettera che corrisponde all'esponente 12, e quindi la lettera L; come terza lettera, corrispondente al terzo fattore primo, il 5, la lettera che nella tabella II corrisponde all'esponente 9, cioè la I.

Pertanto questo metodo di codificazione, anche se poco comodo (perché porta a manovrare dei numeri molto grandi), permette di far corri-

spondere un numero intero ad ogni parola; e di ricostruire questa quando il numero sia dato.

Per esempio si ha che il numero 4.423.680 corrisponde alla parola OCA; si controlla infatti, scomponendo il numero in fattori primi,

$$4.423.680 = 2^{15} \times 3^3 \times 5^1$$

che dà appunto la parola "OCA" secondo le convenzioni stabilite.

10. — L'analisi dei postulati di Peano, che abbiamo presentato nel § 7, e dei postulati che possono essere sostituiti a questi per una costruzione rigorosa dell'aritmetica, porta a concludere che la loro enunciazione richiede degli strumenti logici che sono ad un livello superiore a quello a cui si mantiene il calcolo delle proposizioni non analizzate di cui abbiamo trattato finora.

Invero, nella enunciazione dei postulati di Peano, è necessario poter dire che un certo elemento di un determinato insieme ha una certa proprietà, cioè è necessario poter attribuire un determinato predicato (che esprime la proprietà) ad un certo soggetto; inoltre, nel postulato 3, è necessario poter esprimere che una certa proprietà vale *quale che sia* la classe *s* che si considera.

Queste osservazioni ci conducono a prendere in considerazione un concetto di cui abbiamo già detto nel § 3 del Cap. III; precisamente siamo condotti a considerare delle forme proposizionali 'aperte' del tipo della seguente

(1) x è un cittadino milanese.

Ovviamente una successione di simboli del tipo della precedente non è una frase dotata di senso compiuto; essa tuttavia può diventare tale se al posto del simbolo indeterminato " x " viene posto il nome di un essere umano, che possa diventare il soggetto di una proposizione di cui "milanese", è il predicato.

In altri termini, si potrebbe dire che la frase (1) contiene una lacuna, che è simbolizzata dalla lettera indeterminata x ; la frase viene ad avere un senso compiuto, e quindi un valore di verità, quando la lacuna sia colmata, ponendo al posto della indeterminata x il nome di un elemento dell'universo di discorso di cui si sta trattando.

Generalizzando le considerazioni precedenti si potrebbe considerare anche delle frasi con due o anche con tre lacune: per esempio, parlando di esseri umani, si può pensare alla frase:

(2) x è padre di y

e parlando di geometria e di punti su di una retta, si può pensare alla frase:

(2 bis) x sta fra i punti y e z ,

che coinvolge tre punti.

È possibile quindi pensare a certe proposizioni aperte, aventi cioè una o anche più lacune: tali proposizioni vengono simbolizzate con notazioni convenzionali del tipo

(3) $P(x)$, $P(x,y)$, $P(x,y,z)$ ecc.

simboli di cui si dice che esprimono dei 'predicati monoargomentali', oppure 'biargomentali, triargomentali ecc'.

In generale si potrebbe dire che frasi aperte di questo tipo possono diventare delle proposizioni dotate di un determinato valore di verità quando al posto delle lacune vengano posti i nomi di elementi appartenenti a determinati insiemi, che formano l'universo del discorso.

Tuttavia possiamo osservare che il sostituire il nome dell'elemento di un determinato insieme non è la sola maniera per poter ottenere una proposizione dotata di valore di verità da una forma proposizionale aperta.

Si consideri per esempio, nel caso in cui l'universo del discorso sia quello degli esseri umani esistenti oggi sulla terra, la frase che corrisponde al predicato 'biondo':

x è biondo

che potrebbe essere simbolizzato per esempio con la scrittura

$B(x)$

È chiaro che la frase diventa vera o falsa a seconda che al posto della indeterminata x sia sostituito il nome di un essere umano che è di fatto biondo non lo è. Ma si può anche considerare la frase che si ottiene dicendo:

Tutti gli uomini sono biondi.

Questa frase viene abitualmente simbolizzata scrivendo

$$(4) \quad \forall x B(x)$$

che si legge “per tutti gli x è vero $B(x)$ ”

Il simbolo “ $\forall x$ ” che precede il simbolo di predicato $B(x)$ viene chiamato “quantificatore universale”; in altro modo si potrebbe pensare di ottenere una frase dotata di valore di verità, dalla frase che presenta il predicato ‘biondo’, scrivendo che esistono degli uomini che sono biondi; tale frase viene abitualmente scritta con il simbolo

$$(5) \quad \exists x B(x)$$

che si legge “esistono degli x tali che $B(x)$ è vera”. Il simbolo “ $\exists x$ ” viene chiamato anche “quantificatore esistenziale”; esso potrebbe essere definito in base al quantificatore universale introdotto prima, perché si ottiene subito che la frase (5) equivale alle

$$\neg \forall x [\neg B(x)] .$$

11. — Abbiamo dato nei § precedenti qualche idea sulla impostazione assiomatica di una teoria, come per esempio la aritmetica elementare. Abbiamo osservato ripetutamente che la scelta delle proposizioni primitive che stanno base di una teoria non è necessariamente obbligata dall’oggetto della teoria stessa: può essere considerata un atto di imperio del trattatista, il quale sceglie il sistema di proposizioni primitive che lo soddisfa meglio.

Rimane tuttavia una condizione fondamentale a cui ogni teoria deve ubbidire, per poter essere considerata come un apporto positivo alla scienza: invero il sistema di proposizioni primitive che viene enunciato non deve contenere in sé alcuna contraddizione nascosta.

Notiamo infatti che, anche in base a ciò che è stato esposto sopra (§ 4), se esistesse una contraddizione nelle premesse di una teoria, allora da queste premesse potrebbe essere dedotta una proposizione qualsivoglia, ivi compresa anche la negazione delle premesse, secondo anche il detto classico “ex falso sequitur quodlibet”.

Pertanto il problema di garantire che un insieme di proposizioni primitive sia esente da contraddizioni interne (sia "compatibile", come si dice abitualmente) potrebbe essere risolto esibendo anche una sola proposizione che non può essere dedotta dalle proposizioni stesse.

Non intendiamo qui addentrarci in questa discussione, perché richiederebbe degli sviluppi che escono dai nostri scopi attuali. Vogliamo soltanto ricordare che questa problematica è nata dalle ricerche sui fondamenti della matematica, in particolare della geometrie e della aritmetica elementare.

Nel caso della geometria essa è il risultato di una lunga successione di analisi, durate secoli, a proposito del significato della geometria e sul fondamento di questa scienza. Gli studi riguardanti il cosiddetto postulato della parallela e la creazione delle geometrie che vengono abitualmente chiamate "non euclidee" hanno condotto alla enunciazione di vari sistemi di proposizioni primitive atte a costruire una dottrina da potersi chiamare "geometria"; in questi casi la constatazione della compatibilità di un sistema di proposizioni primitive viene data abitualmente dai matematici esibendo dei "modelli", cioè dei sistemi di enti, tratti dalla esperienza concreta oppure da altri capitoli della matematica, che soddisfano alle proposizioni primitive.

Alla base di una constatazione di questo tipo, che non è una dimostrazione logica, ma semplicemente la esibizione di determinati fatti, sta forse un postulato di coerenza del reale, che noi accettiamo come non contraddittorio nella misura in cui ne constatiamo la esistenza.

Più grave diventa il problema quando si tratti di una dottrina che coinvolge problemi molto più radicali di quelli studiati dalla geometria: per esempio quando si tratti dei principi della aritmetica oppure addirittura della logica formale stessa, che dovrebbe garantire ogni tipo di ragionamento, compreso anche quelli che noi facciamo sulla logica stessa.

A questo proposito possiamo rifarci a ciò che abbiamo esposto nei §§ precedenti, mostrando la possibilità di codificare mediante i simboli dell'aritmetica elementare, e precisamente con i numeri interi, una frase del linguaggio comune; analogamente si mostra che è possibile realizzare una codificazione dello stesso tipo anche per un linguaggio formalizzato, per esempio un linguaggio che utilizzi i simboli di predicati ed i quantificatori che abbiamo esposto nel § precedente.

Queste sommarie osservazioni possono permettere di capire la strada che è stata percorsa da K. Gödel per costruire, in un linguaggio formalizzato che permetta di esprimere l'aritmetica elementare, delle frasi che vengono chiamate 'indecidibili'.

Precisamente una frase di un sistema formale viene detta 'indecibile' (per il sistema formale stesso) se nell'interno del sistema non è possibile costruire la dimostrazione né della frase né della negazione della frase stessa.

Gödel dimostrò in particolare che è indecidibile la frase che afferma la consistenza del sistema formale stesso.

In forma approssimata, si potrebbe dire che con questo risultato si garantisce la impossibilità di accertare la consistenza di un sistema formale, abbastanza potente da poter formalizzare l'aritmetica elementare, rimanendo nell'interno del sistema stesso.

CAPITOLO V
IL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

CAPITOLO V

IL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

1. — In questo Capitolo ci occuperemo di alcune questioni che riguardano la logica materiale (logica major) soprattutto dal punto di vista dell'operazione chiamata abitualmente 'induzione'.

A questo proposito richiamiamo ciò che abbiamo scritto nel § 2 del Cap. I, esponendo le varie fasi del procedimento con cui si costruisce una spiegazione scientifica della realtà che ci si presenta.

In particolare abbiamo visto che la deduzione permette di trarre delle conseguenze verificabili con l'osservazione e con l'esperimento dalle ipotesi che sono state formulate.

Se le osservazioni o gli esperimenti contraddicono alle conseguenze che si traggono dalla ipotesi questa viene demolita; con gergo abituale, si suol dire che essa viene 'falsificata', cioè si constata che essa è falsa, non serve per spiegare i fenomeni che ci appaiono. Occorre quindi modificare l'ipotesi, o enunciarne un'altra diversa, per poter spiegare la realtà ed iniziare la costruzione di una teoria.

Invece se le osservazioni concordano con le deduzioni che si traggono dalla ipotesi che è stata formulata, si suol dire che questa viene confermata dall'osservazione o dall'esperimento; ciò non significa affatto che la ipotesi che è stata formulata sia vera; ricordiamo infatti ciò che è stato scritto nel § 1 del Cap. IV.

Ivi è stato detto ripetutamente che le due proposizioni

$$(1) \quad H \Rightarrow T \quad \text{e} \quad T \Rightarrow H$$

non sono equivalenti; vale invece, insieme con la (1), la:

$$(2) \quad \neg T \Rightarrow \neg H$$

che esprime la falsificazione della ipotesi H a partire dalla dimostrazione della non validità della conseguenza T .

Pertanto la constatazione della verità della conseguenza che si trae dalla enunciazione di una ipotesi non costituisce la dimostrazione della validità assoluta di questa, ma semplicemente la constatazione del fatto che essa può essere una spiegazione dei fenomeni che si osservano.

Quindi, nella pratica della scienza, si cerca di moltiplicare il numero delle conferme sperimentali della ipotesi enunciata, per aumentare il più possibile il grado di credibilità della ipotesi che si è formulata e quindi per aumentare il più possibile la validità delle eventuali teorie che si possono costruire per spiegare la realtà.

Questo problema rientra nel problema filosofico più generale che tratta della validità del processo di 'induzione' di cui abbiamo detto poco fa; quel procedimento con il quale si cerca di enunciare delle leggi valide per tutti i casi possibili a partire dalla osservazione di un certo numero, ovviamente limitato, di casi particolari.

I problemi che riguardano il procedimento di induzione sono stati magistralmente esposti da I. Newton in una pagina dei suoi 'Scritti di Ottica'.

Scriva Newton:

Come in matematica, così nella filosofia naturale (e con questa espressione Newton indica — come si faceva ai suoi tempi — la scienza della natura) lo studio delle cose difficili, mediante il metodo analitico, dovrebbe sempre precedere il metodo sintetico. Questa analisi consiste nel fare esperimenti ed osservazioni, e trarre da questi, mediante l'induzione, conclusioni generali, non ammettendo contro di esse obiezioni, salvo che siano derivate da esperimenti o da altre verità certe. ...

E sebbene il trarre per induzione principi generali dagli esperimenti e dalle osservazioni non equivalga a dimostrarli, tuttavia è questo il miglior modo di ragionare che la natura consenta, e può considerarsi tanto più saldo quanto più l'induzione è generale. E se nessuna eccezione sorge dai fenomeni, si può enunciare una conclusione universale. Ma se, in seguito, dagli esperimenti sorgerà qualche eccezione, allora si dovrà enunciare una conclusione in accordo con queste eccezioni. Mediante questo metodo analitico possiamo procedere dalle cose composte alle cose semplici, dai movimenti alle forze che li producono, e in generale dagli effetti alle loro cause,

e dalle cause particolari a quelle più generali, fino a giungere alle cause generalissime ...”

Si potrebbe dire che il procedimento di induzione è insopprimibile nella conoscenza scientifica della natura e dell'uomo; tuttavia la sua applicazione ha formato oggetto di critiche, tanto sul piano filosofico che su quello della tecnica con la quale si può garantire un procedimento valido ed efficace. Non entriamo qui nelle discussioni che riguardano la filosofia, ed in particolare il significato e la portata del principio di causalità e il valore della nostra conoscenza del mondo a noi esterno.

Ci limitiamo ad osservare che l'analisi del processo di induzione, delle circostanze della sua validità e dei suoi limiti, si può far rientrare nel campo della logica materiale, cioè della dottrina che studia la validità degli enunciati in relazione ai loro contenuti.

Noi esporremo qui soltanto in piccola parte alcune analisi che riguardano questo campo; precisamente esporremo alcuni aspetti di quel capitolo della matematica che viene chiamato abitualmente 'calcolo delle probabilità'.

La cosa appare di un certo interesse, perché nelle scienze dell'uomo, ed in particolare nelle scienze sociali (sociologia, economia, psicologia sociale, politica ecc.) nella maggior parte dei casi le informazioni sono assunte per mezzo di statistiche, gli esperimenti sono impossibili oppure molto difficili, e le decisioni debbono essere prese in materia che riguarda l'impegno economico del singolo o della collettività ed in condizioni di informazione che non è completa.

Daremo quindi nel seguito alcune idee fondamentali del calcolo delle probabilità, inteso come un capitolo della logica materiale, cioè come un capitolo della dottrina che insegna a scegliere le decisioni più razionali in condizioni di informazione incompleta e sfruttando al massimo le informazioni che possono essere tratte dagli esperimenti.

2. — Consideriamo un soggetto umano, chiamiamolo A , il quale decida di prendere delle decisioni economiche in relazione ad un determinato evento E sul quale egli non ha informazioni complete; diremo brevemente che per il soggetto A tale evento è 'aleatorio'; le ragioni perché ciò avvenga possono essere molte: per esempio l'evento E considerato può essere futuro (l'uscita di un determinato numero su una determinata ruota del Lotto nel prossimo sabato ...); oppure semplicemente il sogget-

to può non avere informazioni complete su un evento che è già avvenuto: per esempio, se consideriamo due alpinisti, in un rifugio alpino, alla sera di una domenica, sprovvisti di radio, per essi può ancora avere senso lo scommettere sui risultati delle partite di calcio della domenica, risultati che per loro sono ancora sconosciuti, anche se a tutti gli altri italiani essi sono già noti.

Le circostanze nelle quali un soggetto prende delle decisioni economiche in condizioni di informazione incompleta sono moltissime; spesso ciò avviene perché il soggetto stringe un contratto che viene chiamato 'scommessa', puntando una certa somma ad un gioco che viene detto 'd'azzardo' (lotto, roulette ecc.), acquistando il biglietto di una lotteria e così via. In tal caso la somma che il soggetto incassa nel caso in cui si verifichi l'evento E sul quale ha scommesso viene considerata come una 'vincita'; oppure il soggetto stringe un contratto di assicurazione, e la somma che il soggetto incassa nell'eventualità in cui si verifichi l'evento E viene considerata come un risarcimento.

Per semplicità, noi schematizzeremo il contratto aleatorio che il soggetto A stringe in relazione all'evento E del quale ha informazione incompleta nel modo seguente: esiste un altro contraente B (Stato, biscazziere, assicuratore) che stringe il contratto con il soggetto A ; A versa la somma di denaro a , B la somma di denaro b , con la convenzione che, se l'evento E si verifica, A ritira la propria posta e quella dell'avversario, cioè la somma $(a + b)$; se l'evento \bar{E} non si verifica, cioè se si verifica l'evento "non- E " (simboleggiato con \bar{E}), B ritira la propria posta e quella dell'avversario, cioè ancora una volta la somma $(a + b)$; in queste condizioni si dirà che il soggetto A attribuisce all'evento E la probabilità $p = a / (a + b)$ e che il soggetto B attribuisce all'evento "non- E " la probabilità $q = 1 - p = b / (a + b)$.

Nella realtà non sempre il contraente B esibisce materialmente la somma che egli arrischia; anzi, in generale, quando A stringe il contratto presume la solvibilità del contraente B e quindi non pretende di avere sotto gli occhi la somma che B deve versare; resta però quasi sempre inteso che il contratto non si stringe se A non ha versato la somma a , che è la posta della scommessa, o il premio del contratto di assicurazione.

Queste stesse cose vengono anche presentate in altro modo (del tutto equivalente rispetto al significato ed alla logica) dicendo che il soggetto A attribuisce la probabilità p all'evento E se è disposto a pagare subito la somma pS di denaro contro la garanzia che lui stesso, o una persona da lui designata, riscuoteranno la somma S qualora l'evento E si verifichi.

Indichiamo con il simbolo

$$p(E)$$

la valutazione di probabilità che il soggetto considerato dà dell'evento E , per lui aleatorio.

È chiaro che se $p(E) = 0$ ciò significa che il soggetto considera impossibile l'evento E ; se invece è $p(E) = 1$ ciò significa che il soggetto considera certo l'evento E . In ogni altro caso si ha ovviamente

$$(1) \quad 0 \leq p(E) \leq 1 \quad .$$

3. — Analizzeremo nel seguito le basi sulle quali un soggetto esprime una valutazione di probabilità di un determinato evento E o su molti eventi per lui aleatori.

Tuttavia, quali che siano le ragioni che motivano i giudizi di probabilità di un determinato soggetto in relazione a determinati eventi aleatori deve sempre essere rispettato il PRINCIPIO DI COERENZA, che potrebbe essere espresso nei termini seguenti:

un soggetto A, il quale stipula un certo contratto aleatorio (scommessa) in relazione ad un determinato evento E, è tenuto ad accettare tutte le scommesse che gli vengono offerte in relazione all'evento stesso (o alla sua negazione) in modo tale che, quale che sia il sistema di scommesse considerato, nessuno (né il soggetto né gli avversari) sia sicuro di vincere o di perdere.

Vedremo subito le applicazioni che si possono dare di questo principio di coerenza; qui vorremmo osservare che esso è fondato su una specie di presunzione di ragionevolezza diffusa del comportamento economico dell'uomo; presunzione in base alla quale, così come è lecito attendersi che il soggetto stringa un contratto aleatorio dopo aver prudentemente considerato tutti gli aspetti positivi e negativi e dopo aver assunto tutte le informazioni che gli sono possibili, è prudente pensare che anche i contraenti abbiano fatto lo stesso; e di conseguenza non sia possibile a nessuno (né ad A né ai contraenti) combinare le cose in modo che, in presenza di un evento incerto, vi sia come risultato il guadagno certo di una delle parti.

Naturalmente si tratta di una presunzione astratta, che forse non è sempre valida nella realtà concreta della vita; comunque, essa può basare un principio generale che regge il comportamento razionale dei soggetti umani, anche se nel concreto ben pochi soggetti si comportano sempre secondo la massima razionalità possibile.

Per esporre i risultati che ci interessano, adatteremo nel seguito il simbolismo dell'Algebra di Boole, che abbiamo adottato nel Cap. III, ed il vocabolario della teoria classica della probabilità.

Secondo tale vocabolario e tale simbolismo, accanto a due evento E ed E' si possono considerare altri due eventi che vengono tradizionalmente indicati come 'somma logica' e 'prodotto logico' di E e di E' .

L'evento 'somma logica' di E ed E' viene indicato col simbolo " $E \cup E'$ "; si considera che tale evento si verifichi se si verifica uno almeno dei due, E oppure E' ; non si esclude a priori che possano verificarsi entrambi.

L'evento 'prodotto logico' viene indicato col simbolo " $E \cap E'$ "; si considera che tale evento si verifichi se si verificano entrambi i due, E ed E' .

Può avvenire che sia impossibile che i due eventi si verifichino entrambi: si dice allora che i due eventi sono *incompatibili*, ovvero che si escludono a vicenda e si scrive simbolicamente: $E \cap E' = \emptyset$.

Si constata abbastanza speditamente che per la composizione di due o più eventi aleatori, per la loro negazione e per le altre operazioni formali, valgono tutte le proprietà che sono state elencate nella Tabella del § 14 Cap. III, quando si interpretino i simboli ivi utilizzati secondo quanto abbiamo detto or ora a riguardo della 'somma logica' e del 'prodotto logico' di due eventi aleatori; e quando si interpreti il simbolo " \emptyset " come indicante l'evento "impossibile" ed il simbolo " U " come indicante l'evento certo.

Ricordate brevemente queste convenzioni, prendiamo anzitutto in considerazione il caso di un solo evento E ; e facciamo vedere che il principio di coerenza obbliga il medesimo soggetto A ad attribuire ai due eventi: E e \bar{E} due probabilità p e q tali che si abbia $p + q = 1$. Consideriamo infatti la scommessa sull'evento E , al quale il soggetto A attribuisce la probabilità p , contro la probabilità q che all'evento \bar{E} è attribuita dal suo avversario B ; supponiamo poi che all'evento \bar{E} il soggetto A attribuisca una probabilità q' 'contro la probabilità p' che è attribuita dal soggetto B (o da un altro qualunque avversario impersonato da B) all'evento $\bar{E} = E$.

Si avrà quindi un insieme di poste e di vincite che sono riassunte nella tabella seguente:

evento	posta di A	posta di B	vincita
E	pS	qS	S
\bar{E}	$q'S'$	$p'S'$	S'

Vogliamo dimostrare che condizione necessaria e sufficiente perché il principio di coerenza sia rispettato è che si abbia

$$(1) \quad q' = q \quad \text{ossia} \quad p + q' = 1 \quad .$$

Invero se la (1) non è rispettata, si può escogitare un sistema di scommesse in cui uno degli avversari è sicuro di vincere o di perdere. Sia infatti per esempio:

$$q' > 1 - p \quad \text{ossia} \quad p + q' > 1.$$

In questo caso, il sistema di scommesse in cui è $S = S'$ porta ad una situazione in cui A perde di sicuro: egli infatti deve pagare le poste: $pS + q'S' = (p + q')S$ e vince al massimo S ; la situazione inversa si ha nel caso in cui è $p + q' < 1$.

Viceversa si ha che se la scelta (1) è rispettata nessuno (né A né i suoi avversari) è sicuro di vincere o di perdere. Supponiamo infatti che si abbia per esempio

$$S \leq S' \quad ;$$

in questo caso, in base alla (1), si dimostra facilmente che è

$$S = (p + q')S \leq pS + q'S' \leq (p + q')S' = S' \quad ;$$

in altre parole, la posta pagata da A , data da $pS + q'S'$, non supera il maggiore e non è minore del minore dei due numeri S ed S' , che rappresentano le due vincite nei casi in cui si verifichi rispettivamente E oppure \bar{E} .

Con considerazioni soltanto di poco più generali di quelle esposte ora ora si giunge facilmente alla determinazione della probabilità dell'e-

vento $E \cup E'$ nel caso più semplice, che è quello in cui i due eventi E ed E' siano incompatibili, cioè si abbia $E \cap E' = \emptyset$.

Osserviamo infatti che i tre eventi $E, E', \overline{E \cup E'}$ si escludono due a due, e che almeno uno di essi deve verificarsi. Indichiamo con p, p', q'' le probabilità che il soggetto A attribuisce a questi tre eventi e con S, S', S'' rispettivamente le vincite in ciascuna delle scommesse rappresentate nella tabella seguente:

evento	posta di A	posta di B	vincita
E	pS	qS	S
E'	$p'S'$	$q'S'$	S'
$\overline{E \cup E'}$	$q''S''$	$p''S''$	S''

Anche in questo caso, con ragionamento perfettamente analogo al precedente, si dimostra che la condizione necessaria e sufficiente perché il principio di coerenza, sia rispettato è che si abbia

$$(2) \quad p + p' + q'' = 1 .$$

Ma abbiamo fatto vedere precedentemente che, perché sia rispettato il principio di coerenza occorre e basta che sia

$$p'' + q'' = 1$$

e di qui e dalla (2) si trae

$$(3) \quad p'' = p + p' .$$

Questa formula fornisce dunque la probabilità che A deve attribuire all'evento $E \cup E'$, somma logica di due eventi incompatibili, se vuole rispettare il principio di coerenza.

Il risultato espresso dalla formula nelle ipotesi poste viene abitualmente chiamato 'teorema delle probabilità totali'.

4. — Per approfondire l'analisi, nell'ordine di idee che stiamo adottando, occorre dire qualche cosa a proposito del concetto di 'probabilità condizionata'.

A tal fine osserviamo che spesso occorre considerare alcune circostanze in cui la valutazione della probabilità che un soggetto attribuisce ad un dato evento E può cambiare con l'informazione che il soggetto acquisisce.

Consideriamo ora un evento aleatorio E e supponiamo che il giudizio di probabilità sull'avversario di E possa essere in qualche modo condizionato dalla informazione che si è verificato un evento H .

Per esempio supponiamo che si estraiga una carta a caso da un mazzo di 52 carte, ben mescolato. Supponiamo che l'evento E sul quale il soggetto A vuole formulare un giudizio di probabilità sia l'estrazione dell'asso di picche.

Consideriamo come evento H (condizione necessaria in questo caso) il fatto che sia estratta dal mazzo una carta nera. Supponiamo ora che il soggetto A , dopo l'estrazione della carta dal mazzo, non sia completamente informato sulla carta stessa, ma soltanto sul colore della carta estratta. Appare chiaro allora che il giudizio di probabilità sull'evento E del soggetto A cambia dopo questa informazione, ed è diverso da quello che egli dava prima dell'estrazione.

Diremo che questa probabilità è 'condizionata' dalla estrazione di una carta nera.

Abbiamo detto che il giudizio di probabilità che il soggetto pronuncia sull'avverarsi dell'evento E può essere cambiato in seguito alla informazione del fatto che si è avverato l'evento H . In generale quindi possiamo prendere in considerazione tre giudizi di probabilità:

i) il giudizio di probabilità sull'avverarsi dell'evento H ; tale giudizio viene espresso mediante un numero che indicheremo con

$$(1) \quad p = p(H) .$$

ii) il giudizio di probabilità che viene emesso a proposito dell'avverarsi dell'evento E quando sia acquisita la informazione che l'evento H si è avverato. Tale giudizio si esprime con un numero p' :

$$(2) \quad p' = p(E | H)$$

Il simbolo " $p(E | H)$ " viene chiamato simbolo di "probabilità condizionata".

iii) infine il giudizio di probabilità sull'avverarsi dell'evento prodotto logico $E \cap H$.

La probabilità dell'evento $E \cap H$ viene espressa da

$$(3) \quad p'' = p (E \cap H) .$$

il problema di cui ci occuperemo è quello di stabilire la relazione che intercede tra i numeri p, p', p'' , relazione che dedurremo in base alla applicazione del criterio di coerenza.

Osserviamo tuttavia ancora una volta che l'aver chiamato il numero $p (E | H)$ "probabilità di E condizionata da H " non vuole assolutamente significare che l'evento H sia causa dell'evento E oppure anche soltanto condizione necessaria per l'avverarsi di E . Invero può avvenire che il giudizio di probabilità sull'avverarsi dell'evento E non sia cambiato dalla acquisizione dell'informazione del fatto che H si è avverato.

In questo caso si ha che è

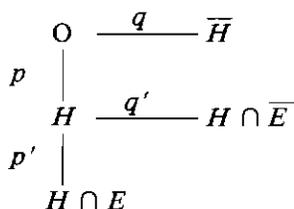
$$(4) \quad p (E | H) = p (E)$$

e i due eventi, E ed H vengono detti 'indipendenti'.

Può anche darsi che l'informazione sul fatto che l'evento E si è avverato possa influire sul giudizio di probabilità che il soggetto emette a proposito dell'evento H .

Ciò avviene anche nel nostro modo di ragionare abituale. Per esempio consideriamo una certa regione dell'Oceano; la informazione sul fatto che ivi in un dato giorno vi sia stata una grandissima tempesta modifica il nostro giudizio di probabilità sull'informazione che nello stesso giorno e nella stessa regione ci sia stato un naufragio. Ma reciprocamente la notizia che ivi in un certo giorno ci sia stato un naufragio modifica il nostro giudizio sulla probabilità dell'informazione che ivi nello stesso giorno ci sia stata una forte tempesta.

Nel caso che ci interessa la situazione potrebbe essere schematizzata nel diagramma:



All'origine O il soggetto deve dare due giudizi: il giudizio di probabilità sull'avverarsi dell'evento H , che si esprime con il valore p , ed il giudizio sull'avverarsi dell'evento $E \cap H$, che si esprime nel numero p'' . A partire dall'origine O si possono avere due informazioni: o che l'evento H è avvenuto oppure che l'evento H non è avvenuto, cioè che è avvenuto l'evento \overline{H} .

In questa seconda ipotesi cessa di avere senso ogni ulteriore giudizio sugli eventi che ci interessano perché, ovviamente, H è condizione necessaria per l'avverarsi di $E \cap H$. Nell'ipotesi contraria, cioè nell'ipotesi che l'evento H sia avvenuto, vi è luogo ad esprimere un secondo giudizio di probabilità, a proposito dell'avverarsi oppure no dell'evento E ; in altre parole vi è luogo ad esprimere il giudizio sull'evento $H \cap E$ e sull'evento contrario $H \cap \overline{E}$.

Secondo lo schema che abbiamo ripetutamente adottato, immaginiamo due giocatori A e B , i quali scommettono con le poste a e b rispettivamente sugli eventi H e \overline{H} . Poniamo

$$(5) \quad a + b = S$$

e nell'ipotesi del verificarsi dell'evento H il giocatore A ritira la somma S , nell'ipotesi dell'evento \overline{H} il giocatore B ritira S . Indicando quindi con p e q i due numeri che traducono i giudizi di A e B rispettivamente sugli eventi H e \overline{H} si avrà, in base ai ragionamenti svolti

$$(6) \quad p = a/S \quad ; \quad q = b/S \quad .$$

Supponiamo di aver acquisito la informazione del fatto che l'evento H è avvenuto ed indichiamo con a' e b' rispettivamente le somme che i due giocatori *dopo questa informazione*, sono disposti a scommettere sull'avverarsi successivo degli eventi E o \overline{E} rispettivamente; poniamo

$$(7) \quad a' + b' = S' \quad ;$$

ed anche in questo caso si ha

$$(8) \quad p' = a'/S' \quad ; \quad q' = b'/S'$$

con i patti analoghi a quelli del caso precedente.

Moltiplichiamo entrambi i membri della (5) per S' ; si ottiene ovviamente, tenendo conto della (7),

$$(9) \quad a(a' + b') + bS' = SS' ,$$

ossia

$$(10) \quad aa' + ab' + bS' = SS' .$$

La (10) può essere interpretata nel modo seguente: il giocatore A è disposto a rischiare la somma aS' col patto di ritirare la somma SS' se l'evento H si verifica; ma egli è anche disposto a rischiare *parte* di questa somma e precisamente la parte aa' col patto di ritirare la somma SS' se si verifica l'evento $E \cap H$. Pertanto si ha che il giudizio di probabilità che egli emette su questo evento è dato da

$$(11) \quad p'' = aa' / SS' ,$$

e tenendo conto delle (6), (8)

$$(12) \quad p'' = p p' .$$

Viceversa si verifica che se la (12) è soddisfatta non vi può essere certezza di vincere, né per il giocatore né per il suo avversario.

Infatti siano S, S', S'' le somme di denaro che danno le vincite nei casi in cui si verificano rispettivamente gli eventi \bar{H}, E subordinato ad H , ed infine $H \cap E$. Le scommesse corrispondenti portano delle spese che sono date rispettivamente da $pS, p'S', p''S''$.

Come mostra anche lo schema che abbiamo presentato, gli eventi che possono verificarsi (incompatibili tra loro) sono: $\bar{H}, H \cap E, H \cap \bar{E}$. A questi corrispondono i guadagni seguenti:

se si verifica \bar{H} : $-pS - p''S'$ (tale guadagno è sempre non positivo e nel calcolo di esso si tiene conto della clausola secondo la quale, se si verifica \bar{H} , cade ovviamente la scommessa sugli eventi $H \cap \bar{E}$ ed $H \cap E$ e quindi lo scommettitore ricupera la somma $p'S'$);

se si verifica $H \cap \bar{E}$: $S - (pS + p'S' + p''S'')$;

se si verifica $H \cap E$: $S + S' + S'' - (pS + p'S' + p''S'')$.

Indichiamo rispettivamente con u , v , w tali guadagni; si fa vedere che se vale la (12), essi non possono essere tutti dello stesso segno: si ha infatti

$$qu + pq'v + pp'w = S'' (pp' - p'') = 0$$

e quindi i tre addendi del primo membro non possono essere tutti dello stesso segno. Si conclude quindi che la validità della (12) è condizione sufficiente perché non vi sia sicurezza di vincere, quale che sia l'evento che si verifica.

Questo risultato potrebbe essere espresso con i simboli adottati poco fa con la formula

$$(13) \quad p(E \cap H) = p(H) p(E | H) .$$

Dalla (13) si trae in particolare la formula che lega le probabilità di due eventi indipendenti, tali cioè che valga la (4). Invero in questo caso la (13) dà in particolare la

$$(14) \quad p(E \cap H) = p(H) p(E) ;$$

essa traduce quella che viene chiamata nelle trattazioni classiche la proposizione (detta anche teorema) delle 'probabilità composte', che riguarda appunto l'avverarsi di un evento 'prodotto logico' di due altri, che siano indipendenti tra loro (cioè tali che l'avverarsi dell'uno non influenzi l'avverarsi dell'altro) e l'avverarsi di entrambi.

5. — Ricordiamo ora ciò che abbiamo detto a proposito della possibilità che la informazione sul fatto che l'evento H è accaduto possa modificare il giudizio di probabilità sull'accadere dell'evento E ; abbiamo osservato che si può ragionare in modo analogo anche sulla modifica del giudizio di probabilità sull'accadimento dell'evento H quando si sia acquisita la informazione che l'evento E è accaduto.

Possiamo ora notare che nel primo membro della (13) del § precedente figura l'evento 'prodotto logico' $E \cap H$ e che per tale evento vale la proprietà commutativa.

Si può quindi scrivere, scambiando nel secondo membro della formula (13) sopra ricordata E ed H :

$$(1) \quad p(H) p(E | H) = p(E) p(H | E) .$$

La formula (1) costituisce il punto di partenza per la cosiddetta 'formula di Bayes', cioè per la formula che dà la cosiddetta *probabilità delle cause*.

In realtà si tratta di una utilizzazione della acquisizione delle conoscenze e delle esperienze per modificare il giudizio di probabilità su certi eventi aleatori; si tratta quindi di un procedimento per utilizzare 'al meglio' le conoscenze che si sono acquisite e per razionalizzare il comportamento del soggetto che deve prendere delle decisioni in condizioni di incertezza. Noi utilizzeremo il linguaggio classico abituale che fa appello alla nozione di causa, tenendo tuttavia ben presente la osservazione fatta or ora sulla vera portata della formula che stabiliremo.

Supponiamo dunque che l'evento E possa essere prodotto da n cause indipendenti che si escludono a vicenda.

Indichiamo con H_1, H_2, \dots, H_n gli eventi che consistono nell'avverarsi di una di queste cause. Ovviamente se una di queste si è avverata, nessuna delle altre può essersi avverata perché — come abbiamo detto — le n cause si escludono a vicenda tra loro. Supponiamo di sapere che l'evento E si è avverato e domandiamoci la probabilità che esso sia stato provocato dalla causa H_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

La formula (1) § 4 viene scritta in questo caso nella forma

$$(2) \quad p(H_i) p(E | H_i) = p(E) p(H_i | E) .$$

Il contenuto della formula (2) potrebbe essere esposto con parole dicendo che la probabilità $p(H_i | E)$ che vogliamo calcolare (probabilità che, essendosi verificato l'evento E , esso sia dovuto all'avverarsi della causa H_i), è proporzionale al prodotto della probabilità dell'evento H_i per la probabilità dell'evento E subordinato alla ipotesi H_i .

Questa osservazione è sufficiente per poter calcolare la probabilità $p(H_i | E)$, come vedremo dagli esempi. Tuttavia è possibile anche calcolare la costante di proporzionalità, la quale, come si desume facilmente dalla, è data da

$$k = 1 / p(E) .$$

Infatti la probabilità $p(E)$ può essere calcolata facilmente in base alle seguenti considerazioni: abbiamo detto che l'evento E può essere con-

siderato come effetto di una fra le n cause indipendenti; quindi la probabilità $p(E)$ può essere calcolata come la somma delle probabilità composte di n eventi indipendenti, ognuno dei quali nell'avverarsi dell'evento H_i e nell'avverarsi di E dipendentemente dall'evento H_i considerato. Si ha quindi

$$(3) \quad p(E) = \sum_{i=1}^n p(H_i) p(E | H_i)$$

e pertanto sostituendo nella (2) si ottiene la formula di Bayes:

$$(4) \quad p(H_i) p(E | H_i) = p(H_i | E) \sum_{i=1}^n p(H_i) p(E | H_i)$$

che consente di dedurre elementarmente $p(H_i | E)$, cioè la probabilità che, quando si sappia che E è avvenuto, questo evento sia dovuto alla causa H_i .

È da osservarsi ancora che il valore della costante k che si ottiene calcolando $p(E)$ in base alla (3) è tale che si abbia

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n p(H_i | E) = 1$$

il che poteva essere trovato anche 'a priori' perché è chiaro che, dato che l'evento E è avvenuto, una almeno delle cause H_i deve averlo provocato.

Vedremo subito su alcuni esempi come possa essere utilizzata la formula di Bayes per sfruttare al meglio le informazioni che si acquisiscono dalla esperienza.

Esempio. Si abbiano due sacchetti, marcati S e D (sinistra e destra). In ognuno dei due sacchetti sono due palline perfettamente indistinguibili al tatto; ma in uno vi sono due palline entrambe bianche, nell'altro vi sono una pallina bianca ed una nera.

Si estrae dal sacchetto D di destra una pallina che risulta essere bianca; qual è la probabilità che nel sacchetto D vi siano due palline bianche?

In questo caso l'evento E è la estrazione dal sacchetto D di una pallina bianca; le cause che lo provocano possono essere due: H_1 il fatto che le due palline di D siano bianche; H_2 il fatto che le palline contenute in D siano una bianca ed una nera.

Date le circostanze in cui l'esperimento si svolge e le informazioni che si posseggono, qualunque soggetto sarà portato ad attribuire uguali

probabilità alle due ipotesi ovvero a scommettere somme tra loro uguali sui due eventi H_1 ed H_2 . Appare pertanto ragionevole porre prima dell'esperimento

$$(6) \quad p(H_1) = p(H_2) = 1/2.$$

Invece si ha chiaramente

$$p(E | H_1) = 1$$

perché se è vera H_1 certamente la pallina estratta è bianca; e d'altra parte si può accettare l'ipotesi che sia

$$p(E | H_2) = 1/2.$$

Pertanto in base alla osservazione fatta, le due probabilità $p(H_1 | E)$, $p(H_2 | E)$ stanno tra loro come 1 ed $1/2$, e la loro somma deve dare 1. Si ha quindi

$$(7) \quad p(H_1 | E) = 2/3 \quad ; \quad p(H_2 | E) = 1/3.$$

Supponiamo ora di rimettere la pallina estratta nel sacchetto D , di agitare il sacchetto, di estrarne una pallina e di trovare ancora che questa è bianca; come possiamo calcolare la probabilità che il sacchetto D , dopo questo esperimento, contenga due palline bianche?

La risposta si ottiene sempre utilizzando la (4), ma tenendo conto delle informazioni dedotte dal primo esperimento; pertanto non sarà più ragionevole accettare le valutazioni date dalla (6), ma, in forza della (7), sarà ragionevole prendere

$$p(H_1) = 2/3 \quad ; \quad p(H_2) = 1/3 \quad ;$$

dopo l'esperimento si ottiene quindi che la probabilità $p(H_1 | E)$, $p(H_2 | E)$ stanno tra loro come $2/3$ ed $1/6$, cioè come 4 sta ad 1. Ne consegue che esse sono date da

$$p(H_1 | E) = 4/5 \quad ; \quad p(H_2 | E) = 1/5.$$

Supponiamo di ripetere il procedimento k volte (k essendo un intero positivo); e supponiamo che ogni volta dal sacchetto D , debitamente scos-

so dopo di aver reintrodotta la pallina estratta, esca sempre la pallina bianca.

Ovviamente non potremo mai essere certi del fatto che il sacchetto *D* contiene due palline entrambe bianche, ma dopo *k* esperimenti di questo tipo le due probabilità $p(H_1 | E)$ e $p(H_2 | E)$ stanno tra loro come 2^k sta ad 1. Questo è pertanto il rapporto delle somme che due soggetti ragionevoli sono portati a scommettere sulle due ipotesi, tenendo così conto di tutte le informazioni che sono state ottenute dagli esperimenti precedenti. Se si vuole, dopo *k* esperimenti ciascuno dei quali fornisce una ulteriore informazione, si ha

$$p(H_1 | E) = 2^k / (2^k + 1) \quad ; \quad p(H_2 | E) = 1 / (2^k + 1)$$

Queste formule danno per esempio, per $k = 5$, i valori

$$p(H_1 | E) = 0,96969\dots \quad ; \quad p(H_2 | E) = 0,00305\dots$$

In parole, se dopo aver estratto cinque volte consecutive una pallina bianca dal sacchetto *D* si dovesse fare una scommessa, sarebbe ragionevole una posta di poco più di 9.696 lire contro il ritiro di 10 mila lire se, alla vuotatura del sacchetto, si trovasse che esso contiene due palline entrambe bianche.

6. — Dalle discussioni precedenti e dall'analisi dell'esempio appare abbastanza chiaramente ribadito il fatto che il giudizio di probabilità di un evento si potrebbe chiamare — in senso lato — un giudizio economico; esso infatti ha come argomento il rischiare determinate somme di danaro da parte di un soggetto e l'acquisizione (da parte del soggetto o di altri) di altre somme a titolo di vincita o di risarcimento.

Appare chiaro quindi dal contesto che il giudizio che si dà su certe decisioni che hanno un seguito economico deve essere fatto in modo serio e ponderato, tenendo presenti le conseguenze e cercando di acquisire tutte le informazioni possibili, ognuna delle quali (come abbiamo visto nella discussione degli esempi) può modificare il giudizio di probabilità. È chiaro inoltre che la ponderatezza e la serietà del giudizio possono essere deformate e modificate se le condizioni psicologiche del soggetto non sono perfette oppure se le circostanze sono tali che il soggetto non è stimolato ad utilizzare la massima prudenza ed avvedutezza. Ciò avviene per

esempio quando la scommessa viene presentata al soggetto in modo da mascherare la spesa della posta rispetto alla presunta mole della vincita: per esempio quando il soggetto viene spinto all'acquisto di un biglietto di lotteria che costa 1000 lire con il miraggio della vincita di 100 milioni.

Invero qui la probabilità dovrebbe essere 10^{-5} , e quindi l'ente emittitore guadagna certamente non appena abbia venduto più di 10^5 biglietti. Un caso clamoroso è rappresentato per esempio dal gioco del Lotto, nel quale lo Stato paga delle vincite che sono di molti ordini di grandezza inferiore a quelle che dovrebbero essere, valutando la probabilità in base al calcolo delle combinazioni possibili.

Pertanto in questi casi ed in casi analoghi, il soggetto tende a trascurare la valutazione prudente della probabilità, essendo in certo modo abbagliato dalla vistosità della possibile vincita, che supera ogni sua abitudine di valutazione ponderata della propria condotta economica. Un fenomeno analogo, e per così dire duale del precedente, si verifica quando il soggetto considera il rischio di eventi molto sgradevoli (come gravi disastri, o addirittura la morte) e quindi accetta anche di pagare dei premi di assicurazione di grandezza superiore a quella che sarebbe dettata dal calcolo prudente ed avveduto delle situazioni.

Una trattazione a parte meriterebbero poi i fenomeni che sono collegati col gioco d'azzardo e che sono stati oggetto di analisi anche letterarie fino dalla più remota antichità. In questi casi si verifica probabilmente un fenomeno psicologico che spinge l'uomo avente un certo carattere (il carattere del 'giocatore' appunto) ad affrontare i rischi e che lo gratifica per questo stesso fatto, indipendentemente dalla vincita.

La verità di queste osservazioni è confermata da tante circostanze; per esempio dalla osservazione, più volte ripetuta, del fatto che la più grande forza che spinge il giocatore a pagare i propri debiti di gioco (che non costituiscono vincolo legale in molte circostanze) è data dalla minaccia di esclusione dal gioco successivo.

Pertanto si potrebbe dire che il gerente del casinò o della bisca fornisce in qualche modo una specie di droga psicologica, che viene acquistata dai giocatori con il pagamento di una posta certamente superiore alla misura razionale del rischio puramente economico.

7. — Le considerazioni che abbiamo svolto finora ci conducono a porre un problema importante, cioè a chiederci in base a quali considera-

zioni un soggetto può enunciare una valutazione prudente della probabilità di un evento aleatorio E , in modo che il suo impegno economico sia il più razionale possibile.

Gli atteggiamenti di fronte a questo importante problema possono essere fatti rientrare sostanzialmente in due casi principali.

Nel primo caso l'evento aleatorio si presenta come il risultato di certe operazioni o di certi esperimenti eseguiti su un sistema fisico che è conosciuto abbastanza bene, in modo da poter prendere in considerazione ed enumerare tutti i casi possibili, e poter valutare, tra tutti questi, il numero dei casi che sono favorevoli all'evento considerato. Allora in questo schema la valutazione prudente della probabilità dell'evento è data dal rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero di tutti i casi possibili.

Si rientra in questo schema quando si considerano i problemi classici riguardanti i giochi che vengono chiamati d'azzardo, oppure si cerca di schematizzare in modo rudimentale ed approssimativo il comportamento di una certa realtà che non si conosce perfettamente, ma che per certe buone ragioni si pensa di poter descrivere abbastanza bene con esperimenti del tipo descritto.

Si consideri, per esempio, il caso del lancio di un dado di forma cubica, sulle cui facce sono scritti i numeri da 1 a sei, e si consideri l'evento che si pensa verificato se, lanciando il dado, compare il numero 6 nella faccia superiore. In queste condizioni, dopo una accurata ispezione del dado, appare ragionevole considerare come prima valutazione della probabilità dell'evento il numero $1/6$, che dà appunto il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili.

Analogamente si consideri un'urna nella quale sono state introdotte 100 palline, indistinguibili al tatto, e si sappia che di queste palline 20 siano bianche ed 80 nere; si consideri come evento favorevole la estrazione di una pallina bianca, dopo di aver bene rimescolato le palline nell'urna. Anche in questo caso appare ragionevole assumere come valutazione provvisoria della probabilità dell'evento il rapporto

$$20/100 = 1/5$$

tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili.

Questa valutazione è tuttavia sottoposta alla clausola che tutti gli eventi possibili si presentino nelle stesse condizioni; si suole esprimere questa clausola dicendo che tutti gli eventi possibili debbono essere "ugualmente possibili"; ma appare difficile dare a questa frase un senso che sia più preciso in generale di quello che abbiamo detto negli esempi sopra

considerati, che si riconducevano ad ispezioni più o meno accurate o alla verifica della impossibilità di distinguere al tatto le palline dell'uno da quelle dell'altro colore.

Possiamo osservare che abbiamo assunto un atteggiamento analogo a questo quando, a proposito dell'Esempio analizzato nel § 5, abbiamo affermato che, in mancanza di informazioni ulteriori, qualunque soggetto sarà portato ad attribuire probabilità uguali alle due ipotesi ivi considerate.

Potremmo aggiungere che la mancanza di informazioni porta ragionevolmente ad accettare la simmetria delle due ipotesi che si possono formulare, in mancanza di ragioni sufficienti che ci facciano distinguere l'una dall'altra. Naturalmente — come abbiamo visto — la situazione cambia dopo gli esperimenti che si eseguono.

Tuttavia si verifica spessissimo un secondo caso; cioè si verifica che sia impossibile schematizzare il verificarsi di un evento aleatorio E mediante il verificarsi di un evento fisico così semplice come quello della estrazione di certe palline da certe urne di composizione più o meno nota. In generale infatti le sole informazioni che si posseggono in relazione a determinati eventi aleatori sono quelle date dalla statistica.

Non intendiamo analizzare qui il significato e la portata di questa scienza; nella nostra trattazione prenderemo in considerazione un aspetto che questa può presentare e precisamente l'aspetto di scienza che studia il modo di assumere le informazioni da grandi masse di fenomeni (oggetti, persone, fatti economici o sociali e così via) e studia le tecniche di elaborazione di queste informazioni in modo che esse si prestino ad essere utilizzate per ulteriori analisi teoriche oppure per valutazioni di probabilità, cioè per razionali impegni economici in condizioni di informazione incompleta.

Supponiamo per es. che il 1° gennaio di un determinato anno un individuo di età x (o — come si dice in matematica attuariale — un "testa" di età x) decida di stringere un contratto di assicurazione a vita intera per un anno per un determinato capitale C ; tale contratto importa che l'assicuratore con il quale egli stipula un contratto si impegna a versare a persona designata dall'individuo (erede designato, beneficiario della assicurazione ecc.) il capitale C se la testa muore entro il 31 dicembre dell'anno stesso.

Per valutare il proprio impegno economico, cioè per calcolare il premio da richiedere, l'assicuratore si baserà sulle statistiche, le quali lo informeranno sulla percentuale di persone che, negli ultimi decenni o magari anche negli ultimi anni, avendo la stessa età x , giunge vivente all'età $x + 1$. La fonte delle statistiche è la sola che gli può fornire una valuta-

zione ragionevole, naturalmente nella ipotesi che nell'anno entrante non cambino le leggi biologiche che reggono la sopravvivenza degli individui umani.

Ovviamente la valutazione della probabilità sarà anche influenzata da altre informazioni che l'assicuratore avrà cura di assumere; cambierà per es. se il sig. x fa una professione particolarmente pericolosa, oppure ha avuto nel passato delle malattie particolarmente gravi e così via...

Ovviamente se l'assicuratore stringe molti contratti nelle stesse condizioni e con individui della stessa età e della stessa professione e dello stesso stato di salute, si può configurare l'ipotesi che la situazione dell'assicuratore rientri in quello che si suole chiamare lo 'schema delle prove ripetute' o anche 'schema di Bernoulli' che analizzeremo subito.

Considerazioni analoghe si possono fare per es. quando in un laboratorio scientifico si facciano esperimenti ripetuti sempre nelle stesse condizioni e si misurino o si annotino in altro modo i risultati.

8. — Nelle applicazioni della teoria della probabilità capita spesso di dover valutare la probabilità di un evento aleatorio H che si intende verificato quando si ripetano n volte certi esperimenti, ognuno dei quali potrebbe dare come risultato un evento aleatorio E del quale è stata valutata la probabilità p .

Si supponga che le condizioni nelle quali si ripetono gli esperimenti non cambino dall'uno all'altro; di conseguenza è ragionevole supporre che la valutazione della probabilità dell'evento E non debba cambiare da prova a prova. Il nuovo evento H di cui parliamo si intende verificato quando l'evento E si verifichi esattamente r volte in n prove; r essendo un intero che soddisfa alle limitazioni

$$(1) \quad 0 \leq r \leq n \quad .$$

Indicando, come abbiamo fatto anche prima, con

$$q = 1 - p$$

la probabilità dell'evento \overline{E} , allora la probabilità di r successi in n prove è data dal numero

$$(2) \quad P_r = p^r q^{n-r} \binom{n}{r}$$

Il numero

$$\binom{n}{r} = n(n-1)\dots(n-r+1) / 1,2,3\dots r$$

viene chiamato "coefficiente binomiale" e dà il numero di combinazioni diverse che si possono ottenere da n oggetti prendendoli a gruppi di r .

Si verifica che i valori massimi della probabilità P data dalla (2) si raggiungono quando il numero r è uguale a

$$(3) \qquad n \cdot p$$

qualora questo numero sia intero, oppure quando è uno dei due interi più vicini al numero (3).

Tuttavia la valutazione di questo valore massimo della probabilità P non ci informa ancora sul numero effettivo di volte in cui l'evento E si presenterà su n prove ripetute nelle stesse condizioni; a questa domanda non si può dare una risposta certa. Si tratta infatti di un problema che consiste sostanzialmente nel domandarsi quale sia la portata della valutazione di probabilità che è stata data con l'osservazione della realtà fisica, oppure viene desunta dalle statistiche del comportamento concreto del soggetto umano.

Un problema cosiffatto è stato preso in considerazione fino dai primordi del calcolo delle probabilità ed ha condotto ad analisi epistemologiche che noi non possiamo qui esporre nei dettagli. Ci limitiamo a dire qualche cosa nel caso di valutazioni di probabilità che sono fatte nel primo dei due modi esaminati nel § precedente, cioè con l'analisi accurata di certi sistemi fisici che si presume rendano abbastanza fedelmente — da questo punto di vista — la situazione aleatoria che si vuole studiare.

In queste condizioni si suole enunciare una legge empirica, che viene spesso richiamata con la espressione 'Legge dei grandi numeri'. Essa si riferisce allo schema di Bernoulli, cioè alla situazione che insorge quando di ripeta un grande numero di esperimenti che possono avere come risultato un certo evento aleatorio E , e vi siano buone ragioni per mantenere costante la valutazione della probabilità dell'evento E in ogni prova.

Indichiamo allora con la espressione 'frequenza empirica' il rapporto

$$(4) \qquad r / n$$

tra il numero dei successi ed il numero delle prove che eseguiscono.

Con questa terminologia, la legge empirica dei grandi numeri potrebbe essere enunciata nel modo seguente:

quando si faccia un grande numero di prove, la frequenza empirica dei successi, nella grande maggioranza dei casi, si avvicina di molto alla probabilità teorica valutata a priori, prima delle prove.

L'enunciato precedente contiene diverse espressioni che non hanno senso preciso e generale, ma hanno solo un significato ristretto, e relativo alla situazione psicologica di chi le legge o le ascolta. Tale per es. è la espressione "numero grande" che non può essere precisata in generale e che può acquistare qualche ulteriore precisione soltanto dal contesto ed in un preciso angolo visuale psicologico. Così per es. il numero 20 miliardi può essere considerato grande se si riferisce agli uomini esistenti sulla Terra attualmente (che sono meno un decimo di questo) ma risulta piccolo se considerato come numero delle molecole di acqua esistenti in un dato recipiente di uso quotidiano.

Analoghe considerazioni possono essere formulate a proposito della espressione "nella grande maggioranza dei casi" e "si avvicina molto"

Tuttavia questa formulazione della legge empirica dei grandi numeri non può essere ulteriormente precisata, se non nel senso che spiegheremo e con un teorema classico, dovuto a G. Bernoulli.

Per enunciare questo teorema ricordiamo che abbiamo chiamato 'frequenza empirica' in un seguito di esperimenti che realizzano lo schema di Bernoulli, il rapporto (4) tra il numero di successi ed il numero delle prove. Chiamiamo poi "scarto relativo" il numero

$$(5) \quad | p - r/n |$$

che dà il valore assoluto della differenza tra la probabilità valutata a priori e la frequenza empirica, rilevata a posteriori, cioè dopo la effettuazione di n esperimenti.

Il teorema di Bernoulli afferma che "nella condizioni dello schema di Bernoulli (cioè nelle condizioni di costanza di valutazione di probabilità da prova a prova), al crescere del numero delle prove tende ad 1 (uno) la probabilità che lo scarto relativo si mantenga minore di un numero reale positivo prefissato". In altre parole, al crescere del numero delle prove, non si ha mai la certezza che lo scarto relativo sia piccolo, ma si sa soltanto che tende ad uno (cioè alla probabilità della certezza) la probabilità che questo fatto si verifichi.

Pertanto il teorema di Bernoulli *non* costituisce la dimostrazione della legge empirica dei grandi numeri.

Sarebbe infatti assurdo pensare che una legge empirica per sua natura potesse essere dimostrata astrattamente con ragionamenti, come avviene per un teorema. Tuttavia, nel caso in esame, questo teorema ci permette di enunciare la legge empirica dei grandi numeri in un caso particolare, cioè quello che si riferisce al valore 1 (uno) della probabilità. Si potrebbe enunciare la stessa cosa in forma lievemente diversa (ma logicamente equivalente) enunciando quella che si potrebbe chiamare la **LEGGE ATTENUATA DEI GRANDI NUMERI**: Nelle condizioni dello schema di Bernoulli, un evento che ha probabilità molto vicina ad uno si verifica quasi sempre.

Altro non si può dire, a meno di pretendere che la matematica con i suoi teoremi possa dare delle regole che reggono la realtà, prima che si forniscano delle informazioni per la elaborazione dei dati. Il che non appare possibile, in presenza di un atteggiamento che voglia essere seriamente scientifico.

9. — I concetti di probabilità che sono stati brevemente esposti nelle pagine precedenti trovano applicazione quasi quotidiana nella metodologia delle scienze sociali e delle scienze della natura vivente e non vivente.

Di particolare interesse è la applicazione di questi concetti alla teoria degli errori di osservazione, applicazione che è solo un esempio di analisi statistica e probabilistica delle osservazioni scientifiche, per la formulazione delle teorie esplicative della realtà.

Nella trattazione classica della teoria degli errori si considera una ripetizione numerosa di una osservazione che dovrebbe portare alla misura di una grandezza fisica. Nella pratica della scienza, tali osservazioni non coincidono mai, soprattutto quando sono numerose, anche se eseguite dallo stesso osservatore e sempre utilizzando la medesima tecnica.

Si pone quindi il problema di dare una valutazione della misura che si intende ottenere, che abbia la massima probabilità, nel senso che fornisca delle informazioni che abbiano la massima utilità per le successive applicazioni e per la formulazione di teorie che siano semplici e comprensive di molti fatti.

Nella concezione originaria dovuta al matematico C.F. Gauss si pensava che avesse un senso parlare della misura “vera” della grandezza in considerazione, e che le differenze delle misure fossero dovute ad “er-

rori" nelle misurazioni, errori che provocavano scarti da quella che si pensava esistente e che era la misura "vera".

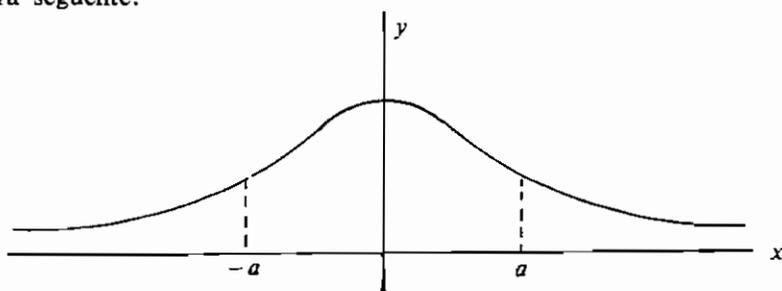
In questo ordine di idee, e con ipotesi abbastanza ragionevoli, Gauss fu condotto ad enunciare la sua celebre legge, che traduce quella che oggi viene abitualmente chiamata la "legge normale" della probabilità.

Le ipotesi che Gauss formulò sono abbastanza accettabili e portano a supporre che gli errori piccoli siano molto più probabili di quelli grandi e quindi molto più numerosi di quelli, nella ripetizione di molte operazioni di misura. Con altre ipotesi abbastanza naturali Gauss fu condotto a scrivere la equazione della sua celebre curva, che viene ancor oggi chiamata curva di Gauss o brevemente "gaussiana".

In un piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali x ed y , la curva gaussiana viene rappresentata da una equazione del tipo

$$y = h (\pi)^{-1/2} \exp (- h^2 x^2)$$

ed ammette una rappresentazione grafica del tipo di quella data dalla figura seguente:



Considerata una ascissa a , l'area della curva compresa tra la curva stessa, l'asse delle x e le due ordinate corrispondenti alle ascisse $+ a$ e $- a$ fornisce la probabilità che un errore di osservazione sia in valore assoluto minore di a .

Si è trovato che numerosi altri fenomeni aleatori soddisfano ad ipotesi analoghe a quelle che furono enunciate da Gauss per gli errori di osservazione e quindi che la loro distribuzione può essere descritta adeguatamente con la curva suddetta. Questa, per la sua importanza nella teoria della probabilità, viene chiamata anche spesso "curva normale" della probabilità.

Non possiamo soffermarci qui ad approfondire le trattazioni che si riconnettono a queste teorie. Ci limitiamo a fare un cenno delle ricerche

che hanno condotto alla dimostrazione di quello che viene chiamato il "teorema centrale limite" della probabilità. Le idee direttive che conducono a tale teorema si basano sulla intuizione che gli errori di osservazione, così come moltissimi altri fenomeni causali, siano dovuti alla concomitanza di moltissime cause, ognuna delle quali è di portata molto piccola e di conseguenza produce effetti molto piccoli; tuttavia il sommarsi di tantissimi piccoli effetti porta a degli effetti osservabili, che si distribuiscono in modo causale, perché non è dato di poter tener conto di tutte le cause e di poter misurare esattamente ogni singolo piccolo effetto.

Tuttavia, anche se non è possibile dominare ogni singolo piccolo fenomeno, è tuttavia possibile dare in qualche modo la descrizione dell'effetto globale, il quale, sotto determinate ipotesi riguardanti le cause, viene adeguatamente descritto dalla legge normale gaussiana.

Si ottiene così di poter dominare anche ciò che a prima vista parrebbe sfuggire alla trattazione esatta di una teoria fisico-matematica e quindi si ottiene di potere, anche in questo caso, utilizzare in modo ottimale le informazioni, anche limitate, e parziali che si posseggono.

INDICE

CAPITOLO PRIMO

1. La logica come dottrina del ben ragionare. La conoscenza scientifica	Pag. 9
2. Logica maggiore e logica minore. I procedimenti e le fasi della costruzione di una teoria	» 10
3. Il momento deduttivo nella costruzione di una teoria scientifica	» 13
4. La matematizzazione della scienza	» 15

CAPITOLO SECONDO

1. La logica classica	Pag. 23
2. I termini. Definizione implicita e termini primitivi. Classificazioni	» 23
3. Gli esempi ed il ragionamento generale. Il contesto. I linguaggi tecnici	» 27
4. Analisi dei termini	» 31
5. I predicabili	» 34
6. Le proposizioni del quadrato fondamentale	» 35
7. Regole di inferenza immediata	» 37
8. Regole di conversione	» 39
9. Sillogismo. Regole generali	» 40
10. I sillogismi della prima figura	» 42
11. I sillogismi della seconda e della terza figura	» 44
12. Antinomie e paradossi	» 48

CAPITOLO TERZO — Operazioni sugli insiemi e algebra di Boole

1. Significato della simbolizzazione	Pag. 53
2. Insieme. Sottoinsieme. Identità e inclusione	» 54
3. Insiemi finiti ed insiemi infiniti. Insieme vuoto	» 58
4. Intersezione; proprietà formali	» 62
5. Unione; proprietà formali	» 62

6. Proprietà associativa	Pag. 62
7. Diagrammi di Eulero; proprietà distributiva e di assorbimento	» 64
8. Complementazione rispetto ad un dato universo	» 68
9. Collegamenti con l'aritmetica	» 70
10. Rappresentazione con i diagrammi di Eulero delle proposizioni del quadrato fondamentale	» 72
11. I sillogismi della prima figura	» 76
12. I sillogismi della seconda figura	» 82
13. I sillogismi della terza figura	» 84
14. Algebra di Boole astratta	» 90
15. Paradossi di Russel e di Richard	» 95

CAPITOLO QUARTO — Il calcolo delle proposizioni

1. Introduzione alla logica delle proposizioni	Pag. 101
2. Connettivi fondamentali e matrici di verità	» 105
3. Aritmetica modulo 2 e calcolo dei valori di verità	» 111
4. Formule ben formate	» 113
5. Tautologie fondamentali	» 115
6. Leggi formali dell'algebra delle proposizioni	» 117
7. Assiomi di Hilbert e conseguenze	» 122
8. Gli assiomi di Peano per i numeri naturali	» 125
9. Codificazione di Gödel	» 127
10. Predicati e quantificatori	» 130
11. Consistenza di un sistema formale e frasi indecidibili	» 132

CAPITOLO QUINTO — Il calcolo delle probabilità

1. I problemi della induzione	Pag. 137
2. Il concetto di probabilità	» 139
3. Principio di coerenza e conseguenze	» 141
4. Probabilità condizionate	» 144
5. Formula di Bayes e conseguenze	» 149
6. Problemi psicologici della valutazione della probabilità	» 153
7. Probabilità e statistica	» 155
8. Lo schema delle prove ripetute	» 157
9. La teoria degli errori e il teorema centrale limite della probabilità	» 160

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

Finito di stampare
nel giugno 1983
dalla Graphica dei F.lli Vaghi
in Cesano Maderno (Mi)

